

Kvantumoptika alapjai

Alapvető matematikai módszerek a kvantumoptikában
A fény nemklasszikus állapotainak előállítása

Mogyorósi Gábor

tudományos segédmunkatárs

Pécsi Tudományegyetem, Fizikai Intézet

Elméleti Fizika Tanszék



Pécs, 2019.
(átdolgozott kiadás)

Tartalomjegyzék

Bevezetés	5
1. Matematikai alapok	7
1.1. Hilbert-tér	7
1.2. Lineáris operátorok	10
1.3. Sűrűségoperátorok	14
2. Az elektromágneses sugárzási tér kvantumelmélete	16
2.1. Alapismeretek	16
2.2. Fázisoperátorok	24
2.3. A kvantált elektromágneses sugárzási tér állapotai	29
2.3.1. Koherens állapotok	29
2.3.2. Összenyomott állapotok	35
2.3.3. Fotonszám- és speciális fotonszámállapotok	43
2.3.4. Schrödinger-macska állapotok	44
2.3.5. Amplitúdó-összenyomott állapotok	46
2.3.6. Nevezetes fotonszámállapot-szuperpozíciók	47
3. Kvázivalószínűség-eloszlásfüggvények	50
4. A kvantumoptika elemei	54
4.1. Nyalábosztó	54
4.2. Homodin mérés és N -foton detektálás	57

5. A fény nemklasszikus állapotainak előállítása	60
5.1. Makroszkopikus kvantumszuperpozíció előállítása Kerr-közegben	61
5.2. Schrödinger-macska állapotok haladóhullámú előállítása (feltételes módon)	63
5.3. Egyenesen és rácson vett koherens-szuperpozíció haladóhullámú feltételes előállítása	65
A. Heisenberg-féle határozatlansági reláció	70
B. Kanonikus kvantálás	72
C. Fotoneltűntő és fotonkeltő operátor	74
D. Exponenciális operátoralgebra	76
D.1. Baker-Hausdorff lemma	76
D.2. Baker-Campbell-Hausdorff formula	77
Ajánlott Irodalom	80

Bevezetés

A fény kettős természete több évszázadig, egészen a XX. század elejéig egy megoldatlan probléma volt a fizikában. A fény duális természetének két oldala, nevezetesen a diszkrétség (részecsketulajdonság) és a folytonosság (hullámtermészet), természetes egységbe ötvöződik a fény kvantumelektrodinamikai tárgyalásában, melynek alapjait Paul Dirac brit Nobel-díjas fizikus fektette le az 1920-as évek második felében.

Az 1960-as évek elején Roy Glauber amerikai Nobel-díjas fizikus rámutatott, hogy olyan optikai jelenségek, problémák tárgyalására, ahol a fény kettős, hullám-részecske természete megnyilvánul, a kvantumelektrodinamikai leírást kell alkalmazni. Kiemelt jelentőségű eredménye, hogy a fény koherenciatulajdonságainak jellemzésére bevezette az ún. koherencia-függvényeket, és ezek segítségével definiálta a sugárzási tér nevezetes kvantumállapotát, az ún. koherens állapotot, amely a klasszikus fénynek, az ideális egymódusú lézersugárzásnak megfelelő kvantumállapot. Ezért Glaubert tekinthetjük a kvantumoptikai kutatások elindítójának.

Napjainkban egyre több olyan optikai jelenség létezik, ahol a fény „nemklasszikus” tulajdonsága egyértelműen megnyilvánul. Az irodalomban a „nemklasszikus fény” kifejezést valamilyen speciális kvantumtulajdonságú, a fény kvantumelméletével leírható fény megnevezésére használják. Ilyen nemklasszikus állapotok például a fotonszám-állapotok, a különböző szuperponált állapotok (például a koherens- és fotonszám-állapot-szuperpozíciók, és a Schrödinger-macska állapotok) és az összenyomott állapotok. Utóbbi fényállapotok fontos tulajdonsága, hogy valamelyik mérhető fizikai mennyiség kvantumzaja kisebb, mint a koherens állapotban. Az ilyen tulajdonságú fényt általánosan összenyomott állapotú fénynek nevezzük, a konkrét elnevezés tartalmazza annak a fizikai mennyiségnek a megnevezését, amelynek bizonytalansága kisebb a koherens értéknél.

Az elmúlt harminc évben a kvantumoptikai kutatások jelentős része foglalkozik a nemklasszikus fényállapotok előállításával, alkalmazásaival. Mivel a jelenleg használt optikai kommunikációs rendszerekben és mérési eljárásokban lézerefényt használnak, amely ideális esetben koherens állapotú fény jelent, és az elérhető jel-zaj viszony végső határát a koherens állapot kvantumzaja jelenti, ezért a nagyobb pontosság és hatékonyság érdekében jelentős szerepet játszhatnak a nemklasszikus fényállapotok előállítása és gyakorlati felhasználása.

A jegyzet 1. fejezetében a legfontosabb kvantummechanikai alapfogalmakat ismertetjük, ezek a Hilbert-terek és tulajdonságai, a Dirac-jelölés, valamint a lineáris operátorok.

A 2. fejezetben az elektromágneses sugárzási tér kvantálásáról lesz szó részletesen, mely a kvantumoptika alapját képezi, ezután a fázisoperátorok alapproblémáját taglaljuk, majd a kvantált elektromágneses sugárzási tér nevezetes állapotait és fontos tulajdonságait fogjuk bemutatni.

A 3. fejezet tartalmazza a kvázivalószínűségeloszlás-függvények alapvető ismeretét, mellyel a fény kvantumállapotai reprezentálhatók a kvantummechanikai fázistérben.

A 4. fejezet kvantumoptika fontos optikai elemeit tárgyalja, mint a nyalábosztó és a homodin detektálás alapvető elméletét.

A fény nemklasszikus állapotainak előállítása a kvantumoptika egyik fontos kutatási területe, melynek fontosabb fajtája az haladóhullámú feltételes módon történő kvantumállapot-előállítás („quantum state engineering”). Ennek három fontos alapsémáját mutatjuk be, mely az 5. fejezet tartalmát fogja képezni.

1. fejezet

Matematikai alapok

1.1. Hilbert-tér

Definíció Hilbert-tér: komplex számtest feletti n dimenziós skalárszorzattal ellátott teljes, lineáris, metrikus tér. A Hilbert-tér elemeit vektoroknak hívjuk, amelyeket a " $| \rangle$ " szimbólummal fogjuk jelölni, ez az ún. Dirac-féle jelölésmód. A Hilbert-térhez tartozó skalárszorzat egy olyan $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény, amelyre az alábbi állítások teljesülnek:

$$\langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle^*, \quad (1.1)$$

$$\langle x_1 + x_2|y \rangle = \langle x_1|y \rangle + \langle x_2|y \rangle, \quad (1.2)$$

$$\langle x|\lambda y \rangle = \lambda \langle x|y \rangle, \quad \langle \lambda x|y \rangle = \lambda^* \langle x|y \rangle, \quad (1.3)$$

$$\langle x|x \rangle \geq 0, \quad \langle x|x \rangle = 0 \Leftrightarrow |x\rangle: \text{nullvektor}, \quad (1.4)$$

azaz a skalárszorzat a második változóban lineáris, az első változóban konjugált lineáris, illetve pozitív definit. A skalárszorzatból norma származtatható, $\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$, melyből a távolság, $d(x, y) = \|x - y\|$. A Hilbert-tér ezen normához tartozó topológiában teljes (bármely Cauchy-sorozat konvergens). A Riesz-féle reprezentációs tétel szerint bármely Hilbert-téren ható lineáris funkcionál reprezentálható egy \mathcal{H} -beli vektorral való skalárszorzással. Így a $\langle x|$ jelölés alatt a \mathcal{H} duálisában lévő lineáris funkcionált értjük, aminek hatása egy $|y\rangle$ vektorra: $\langle x|y \rangle$. Megjegyezendő, hogy egy vektortér elemei és duálisának elemei úgy viszonyulnak egymáshoz, mint a mátrixszámításban az oszlopvektorok a sorvektorokhoz. A következőkben néhány példát mutatunk Hilbert-térre:

- \mathbb{C}^n tér: komplex elemű n hosszú vektorok tere az $\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i$ skalárszorozattal,
- ℓ^2 tér: négyzetesen összegezhető sorok tere, azaz $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 < \infty$, az $\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i$ skalárszorozattal. Ez nem más, mint az előző példa természetes végtelen dimenziós általánosítása.
- $L^2(\mathbb{R})$ tér: a számegegyenesen négyzetesen integrálható függvények tere, vagyis $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$, az $\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx$ skalárszorozattal. Ennek a térnek egy bázisát adják a jól ismert Hermite-függvények. A kvantummechanikában a fizikai rendszereket hullámfüggvényekből álló komplex Hilbert-tér ír le, ezek a hullámfüggvények a rendszer egyes állapotait írják le, a hullámfüggvények egy L^2 tér elemei a kvantummechanika modern megfogalmazásában.
- Szeparábilis Hilbert-tér: Megszámálható bázissal rendelkező Hilbert-tér.

A továbbiakban csak szeparábilis Hilbert-terekkel fogunk foglalkozni. Bármely vektor kifejezhető a tér egy $\{|\phi_i\rangle\}$ bázisán (általánosított Fourier-sorfejtés):

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i |\phi_i\rangle, \quad (1.5)$$

ekkor rögzített bázis mellett $|\Psi\rangle$ -t helyettesíthetjük a c_i koordinátáiból álló vektorral, így minden végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér izomorf lesz az ℓ^2 térrel, és egymással is. A Hilbert-tér két eleme egymásra ortogonális, ha skaláris szorzatuk nulla, azaz $\langle f|g \rangle = 0$. Egy Hilbert-térbeli $\{|a_n\rangle\}$ halmazt ortonormálnak nevezünk, ha bármely két különböző elemének a skaláris szorzata 0, míg önmagával vett skaláris szorzata 1. Az $\{|a_n\rangle\}$ halmazt a Hilbert-téren teljes ortonormált rendszernek nevezünk, ha bármely Hilbert-térbeli $|a\rangle$ vektor előáll az $\{|a_n\rangle\}$ halmazbeli elemek lineáris kombinációjaként:

$$|a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |a_n\rangle, \quad (1.6)$$

ahol c_n komplex számok, melyek a következő módon állíthatók elő:

$$\langle a_m|a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \underbrace{\langle a_m|a_n\rangle}_{=\delta_{m,n}} = c_m. \quad (1.7)$$

Tetszőleges Hilbert-térbeli elem előállítható egy teljes ortonormált rendszer ismeretében:

$$|a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\rangle \langle a_n | a \rangle. \quad (1.8)$$

A teljes ortonormált rendszert szokás bázisnak is hívni. Az $|a_n\rangle \langle a_n|$ szorzatot diadikus szorzatnak, vagy projektornak nevezzük, ami nem skalár, hanem egy mátrix, amely a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n\rangle \langle a_n| = \mathbb{1} \quad (1.9)$$

feltételt elégíti ki, ahol $\mathbb{1}$ az egységet jelöli. Megjegyzések a Hilbert-térrel kapcsolatban:

- Minden Hilbert-tér egyben Banach-tér¹ is (fordítva akkor igaz, vagyis pontosan akkor származtatható normája valamely skalárszorzatból, ha a tér feletti norma teljesíti az ún. paralelogramma-azonosságot, azaz a Jordan–Neumann-tételt),
- Minden $L^2(\mathbb{R})$ tér egy Hilbert-tér,
- Minden véges dimenziós belső szorzattal rendelkező tér (mint az euklideszi-tér a szokásos skalárszorzattal) Hilbert-teret alkot. A végtelen dimenziós terek jelentősége az alkalmazások területén sokkal nagyobb. Pár példa ezekre:
 - Az unitér csoportreprezentációk elmélete,
 - A négyzetesen integrálható sztochasztikus folyamatok,
 - A parciális differenciálegyenletek Hilbert-tér elmélete, különösen a Dirichlet-probléma² megfogalmazásai,
 - A függvények spektrális analízise,
 - A kvantummechanika matematikai megfogalmazásai.

A belső szorzat teszi lehetővé a „geometriai” látásmód megőrzését, a véges dimenziós terekben megszokott geometriai nyelvezet használatát. Az összes végtelen dimenziós topologikus vektortér közül a Hilbert-terek a „legjobban viselkedőek”, mivel ezek állnak legközelebb a véges dimenziós terekhez.

¹Banach-tér: olyan teljes normált vektorteret értünk alatta, vagyis olyan vektorteret, mely a normából származtatott metrikára nézve teljes.

²Dirichlet-probléma: A peremérték-probléma, ahol a határérték egy értéket ad a problémának.

1.2. Lineáris operátorok

Definíció Lineáris operátor: egy $\hat{\mathbf{A}}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ operátor lineáris, ha $\forall \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$, valamint $\forall |x_{1,2}\rangle \in \mathcal{H}$ esetén $\hat{\mathbf{A}}(\lambda_1|x_1\rangle + \lambda_2|x_2\rangle) = \lambda_1\hat{\mathbf{A}}|x_1\rangle + \lambda_2\hat{\mathbf{A}}|x_2\rangle$. Két operátort $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}})$ akkor tekintünk egyenlőnek, ha bármely Hilbert-térbeli $|x\rangle$ vektorra igaz, hogy

$$\hat{\mathbf{A}}|x\rangle = \hat{\mathbf{B}}|x\rangle. \quad (1.10)$$

Az operátorok között értelmezve van az összeadás és a szorzás is:

$$(\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}})|x\rangle = \hat{\mathbf{A}}|x\rangle + \hat{\mathbf{B}}|x\rangle, \quad (1.11)$$

$$(\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}})|x\rangle = \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{B}}|x\rangle) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}|x\rangle.$$

Az operátorok felcserélhetősége fontos szerepet játszik a kvantummechanikában. Két operátor felcserélhető, ha $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}$, általánosan a felcserélhetőségre jellemző

$$[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}} \quad (1.12)$$

kifejezést kommutátornak nevezzük, amelynek ha értéke nulla, akkor a két operátor felcserélhető, egyébként pedig nem. A felcserélhetőség a mérések, illetve transzformációk felcserélhetőségével van kapcsolatban, mivel az operátorok jelentik a méréseket, illetve a transzformációkat. Ha két operátor nem cserélhető fel, akkor a nekik megfelelő két mérés, illetve transzformáció sorrendje sem felcserélhető. Ezeket kanonikusan konjugált operátoroknak hívjuk. Ilyen nem felcserélhető operátorok a helykoordináta- és impulzusoperátorok, amelyekre a $[\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}_x] = [\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{p}}_y] = [\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{p}}_z] = i\hbar$ reláció teljesül.

Ha két adott operátornak szimultán sajátfüggvényekből álló bázisa van, akkor a két operátor felcserélhető. Ez az állítás visszafelé is igaz. De mi a szimultán sajátfüggvény? Legyen adott két operátor, $\hat{\mathbf{A}}_1$ és $\hat{\mathbf{A}}_2$, eszerint φ akkor szimultán sajátfüggvénye, ha

$$\hat{\mathbf{A}}_1\varphi = c_1\varphi, \quad (1.13)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_2\varphi = c_2\varphi, \quad (1.14)$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Ha balról megszorozzuk az (1.13) sajátérték-egyenletet $\hat{\mathbf{A}}_2$ -vel, az (1.14) sajátérték-egyenletet pedig $\hat{\mathbf{A}}_1$ -gyel, akkor azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_2\hat{\mathbf{A}}_1\varphi = \hat{\mathbf{A}}_2c_1\varphi = c_1\hat{\mathbf{A}}_2\varphi = c_1c_2\varphi \\ \hat{\mathbf{A}}_1\hat{\mathbf{A}}_2\varphi = \hat{\mathbf{A}}_1c_2\varphi = c_2\hat{\mathbf{A}}_1\varphi = c_2c_1\varphi \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{\mathbf{A}}_1\hat{\mathbf{A}}_2 = \hat{\mathbf{A}}_2\hat{\mathbf{A}}_1. \quad (1.15)$$

Ezzel belátható, hogy $\hat{\mathbf{A}}_1$ és $\hat{\mathbf{A}}_2$ operátor egymással felcserélhető az adott sajátfüggvényre nézve, ha a függvény szimultán sajátfüggvény. Ha létezik ilyenekből álló bázis, akkor minden függvény kikombinálható sajátfüggvényekből, tehát minden függvényre nézve igaz, hogy nem számít milyen sorrendben alkalmazzuk a két operátort a függvényekre, mivel ugyanazt kapjuk. Két fizikai mennyiségnek akkor létezik egyszerre pontos értéke (akkor mérhetők egyszerre), ha operátoruk felcserélhető, azaz a kommutátoruk nulla. Ha ugyanis olyan rendszeren mérjük meg a fizikai mennyiség értékét, amelyet a mennyiséghez tartozó operátor sajátfüggvénye ír le, akkor a sajátfüggvényhez tartozó sajátértéket kapjuk. Ezekből az következik, hogy azon mennyiségpárookra, amelyekre határozatlansági reláció áll fent, a kommutátor nem tűnhet el. Ha két operátor nem felcserélhető, akkor nincs közös sajátállapot-rendszerük, amin mindkettő operátor sajátértékkel rendelkezik, s így tetszőleges pontosságú mérés egyszerre nem hajtható végre a két fizikai mennyiségen.

A kvantummechanikában a lineáris, méréseket leíró operátorok önadjungáltak, más néven hermitikusak. Egy operátor önadjungált, ha az adjungáltja önmaga,

$$\hat{\mathbf{A}}^\dagger = \hat{\mathbf{A}}, \quad (1.16)$$

ahol \dagger az adjungálást jelöli. Az adjungálás (vagy hermitikus konjugálás) az operátor (vagy mátrix) transzponálását, majd komplex konjugálását jelenti. Fontos megjegyezni, hogy két operátor szorzatának konjugálása, megváltoztatja az operátorok sorrendjét:

$$(\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}})^\dagger = \hat{\mathbf{B}}^\dagger\hat{\mathbf{A}}^\dagger. \quad (1.17)$$

Hermitikus konjugálás segítségével $|x\rangle$ vektorból $\langle x|$ vektort képzünk, mely fordítva is igaz. A következőkben néhány példát mutatunk önadjungált operátorokra:

- A \mathbb{C}^2 -n ható önadjungált operátorok, azaz a 2×2 -es önadjungált mátrixok között (az identitással együtt) bázist alkotnak az ún. Pauli-mátrixok:

$$\hat{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{I}}, \quad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

ahol az $\hat{\mathbf{I}}$ operátort egységoperátornak vagy egységmátrixnak nevezzük,

- Az ℓ^2 -n ható önadjungált operátorok önadjungált végtelen mátrixokkal írhatók le, az alábbi mátrix például az impulzusoperátor egy lehetséges reprezentációja:

$$\begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ -i\sqrt{1} & 0 & i\sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & -i\sqrt{2} & 0 & i\sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & -i\sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

- Az $L^2(\mathbb{R})$ téren két fontos nem korlátos önadjungált operátor:

- Koordinátával való szorzás operátora: $\hat{\mathbf{x}}f(x) = xf(x)$, ha $f(x), xf(x) \in L^2(\mathbb{R})$,
- Differenciáloperátor: $\hat{\mathbf{p}}f(x) = -i\hbar \frac{d}{dx}f(x)$, ha $f(x), f'(x) \in L^2(\mathbb{R})$.

Operátorok között az egyik legfontosabb típus az ún. unitér operátor. Egy $\hat{\mathbf{U}}$ operátor akkor unitér, ha adjungáltja megegyezik az inverzével:

$$\hat{\mathbf{U}}^{-1} = \hat{\mathbf{U}}^\dagger, \quad (1.20)$$

valamint kielégíti az alábbi feltételt:

$$\hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{U}}^\dagger = \hat{\mathbf{U}}^\dagger\hat{\mathbf{U}}^{-1} = \mathbb{1}. \quad (1.21)$$

Az $\hat{\mathbf{U}}$ unitér operátorokat szokás unitér időfejllesztő operátoroknak is nevezni, melyek kielégítik az időfüggő Schrödinger-egyenletet:

$$i\hbar \frac{d\hat{\mathbf{U}}(t)}{dt} = \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{U}}(t), \quad (1.22)$$

melynek általános megoldása:

$$\hat{\mathbf{U}}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathbf{H}}t\right). \quad (1.23)$$

Unitér transzformációk izometrikusak (szög- és távolságtartóak), amely azt jelenti, hogy tetszőleges $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$ állapotok esetén

$$\langle \hat{\mathbf{U}}\psi | \hat{\mathbf{U}}\phi \rangle = \langle \psi | \hat{\mathbf{U}}^\dagger \hat{\mathbf{U}} | \phi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle. \quad (1.24)$$

Unitér operátorokkal megvalósított transzformációk az ortogonális rendszert ortogonális rendszerbe, az ortonormált rendszert ortonormált rendszerbe, a teljes ortonormált rendszert teljes ortonormált rendszerbe transzformálnak.

Definíció Mátrix nyoma: tetszőleges $\hat{\mathbf{M}}$ mátrix főátlóján lévő elemek összege (angolul trace, németül spur). Jelölése: $\text{Tr}(\hat{\mathbf{M}})$, vagy $\text{Sp}(\hat{\mathbf{M}})$. Tulajdonságai a következők:

- A nyom lineáris művelet:

$$\text{Tr}(\lambda_1 \hat{\mathbf{M}} + \lambda_2 \hat{\mathbf{N}}) = \text{Tr}(\lambda_1 \hat{\mathbf{M}}) + \text{Tr}(\lambda_2 \hat{\mathbf{N}}) = \lambda_1 \text{Tr}(\hat{\mathbf{M}}) + \lambda_2 \text{Tr}(\hat{\mathbf{N}}), \quad (1.25)$$

- A nyomban szereplő tagok ciklikusan permutálhatók:

$$\text{Tr}(\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{O}}) = \text{Tr}(\hat{\mathbf{O}}\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{N}}) = \text{Tr}(\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{O}}\hat{\mathbf{M}}), \quad (1.26)$$

ahol felhasználtuk a nyom egy másik fontos tulajdonságát:

$$\text{Tr}(\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{N}}) = \text{Tr}(\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{M}}). \quad (1.27)$$

- A nyom bázisfüggetlen:

$$\text{Tr}(\hat{\mathbf{U}}^\dagger \hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{U}}) = \text{Tr}(\hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{U}}^\dagger) = \text{Tr}(\hat{\mathbf{M}} \mathbb{1}) = \text{Tr}(\hat{\mathbf{M}}) \quad (1.28)$$

tetszőleges $\hat{\mathbf{U}}$ unitér transzformációra, ahol kihasználtuk azt, hogy a nyomon belüli tagokat ciklikusan permutálhatjuk.

- Egy tetszőleges operátor nyoma megegyezik a sajátértékeinek összegével:

$$\text{Tr}(\hat{\mathbf{M}}) = \text{Tr}\left(\sum_i \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|\right) = \sum_i \lambda_i \langle v_i | v_i \rangle = \sum_i \lambda_i. \quad (1.29)$$

- Speciális esete a parciális nyom, amely egy olyan leképezés, ami a $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ összetett tér $\hat{\rho}_{AB}$ sűrűségoperátorából egy \mathcal{H}_A részrendszerbeli sűrűségoperátort képez le az alábbi módon:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_A &= \text{Tr}_B(\hat{\rho}_{AB}) = \text{Tr}_B\left(\sum_{nmkl} c_{nmkl} |a_n\rangle\langle a_m| \otimes |b_k\rangle\langle b_l|\right) = \\ &= \sum_{nmkl} c_{nmkl} \langle b_k | b_l \rangle |a_n\rangle\langle a_m|, \end{aligned} \quad (1.30)$$

amely igaz lesz arra vonatkozóan is, ha a B részrendszer sűrűségoperátora a meghatározandó.

1.3. Sűrűségoperátorok

Definíció Sűrűségoperátor: kevert kvantumállapotok leírására szolgáló operátor. Ha a kvantummechanikai rendszer egy jól meghatározott állapotban van, akkor az állapotát egy $|\psi\rangle$ állapotvektorral jellemezhetjük. Ha a rendszer állapotát nem ismerjük biztosra, csak azt tudjuk, hogy a $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$ állapotok valamelyikében p_1, p_2, \dots, p_n valószínűségekkel lehet, akkor ez egy nem tiszta állapot és nem jellemezhető egyértelműen egy állapotvektorral. Egy ilyen állapotot a sűrűségoperátor segítségével jellemezzük:

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad (1.31)$$

ahol $|\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ sűrűségoperátort tiszta állapotnak hívjuk. A sűrűségoperátor segítségével egy tetszőleges A fizikai mennyiség átlagértéke könnyen kiszámítható a tekintett nem tiszta állapotban mint

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \sum_{i=1}^n p_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle = \sum_{i=1}^n p_i \langle \psi_i | \hat{\mathbf{I}} \hat{A} | \psi_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} p_i \langle \psi_i | a_j \rangle \langle a_j | \hat{A} | \psi_i \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} \langle a_j | \hat{A} | \psi_i \rangle p_i \langle \psi_i | a_j \rangle = \text{Tr}(\hat{A} \hat{\rho}). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Tetszőleges reprezentációban a sűrűségoperátort $\hat{\rho} \rightarrow [\rho_{nm}]$ sűrűségmátrixszal jellemezhető. Legyenek egy adott reprezentáció bázisvektorai: $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_n\rangle$, így

$$\hat{\rho} = \hat{\mathbf{I}} \hat{\rho} \hat{\mathbf{I}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_n\rangle \langle a_n | \hat{\rho} | a_m \rangle \langle a_m | = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{nm} |a_n\rangle \langle a_m|. \quad (1.33)$$

A sűrűségoperátorok tulajdonságai a következők:

- hermitikus, azaz $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$, valamint $\rho_{nm} = \rho_{mn}^*$,
- tiszta és kevert állapotok sűrűségoperátoraira igaz, hogy $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$,
- $\hat{\rho} \geq 0$, azaz a $\hat{\rho}$ egy pozitívan értelmezett hermitikus operátor,
- sajátértékei 0 és 1 közötti valós szám,
- $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1$, a tiszta állapot esetén $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$, mert $\hat{\rho}^2 = |\psi\rangle \underbrace{\langle \psi | \psi \rangle}_{=1} \langle \psi | = |\psi\rangle \langle \psi | = \hat{\rho}$,

- a sűrűségoperátor időbeli változását az ún. von Neumann-egyenlet adja meg:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} &= \frac{d\hat{U}(t, t_0)}{dt} \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0) + \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \frac{d\hat{U}^\dagger(t, t_0)}{dt} = \\ &= -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0) + \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \frac{i}{\hbar} \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{H} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}(t)], \end{aligned} \quad (1.34)$$

ahol

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)| = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \hat{U}(t, t_0) |\psi_i(t_0)\rangle \langle \psi_i(t_0)| \hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0) \end{aligned} \quad (1.35)$$

az időtől függő sűrűségoperátor.

Ebben a fejezetben az állapotvektorokról, valamint az operátorokról és azok fontosabb tulajdonságairól esett szó részletesen, amelyek fontos szerepet fognak játszani a későbbi számításokban.

2. fejezet

Az elektromágneses sugárzási tér kvantumelmélete

2.1. Alapismeretek

A fény kettős természetét a XX. század legelején a kvantummechanika oldotta meg. A fény kettős természetét tárgyaló elmélet alapja szerint az elektromágneses sugárzási teret a klasszikus elektrodinamika törvényeinek megfelelően adott térrészben periodikus határfeltételek mellett normálmódusokra bontjuk fel, majd minden normálmódushoz egy egységnyi tömegű harmonikus oszcillátort rendelünk a téregyenletekkel összhangban oly módon, hogy a harmonikus oszcillátor energiája egyezzen meg a térmódus energiájával, azaz a kvantummechanika elmélete szerint tárgyaljuk. Az elektromos és mágneses teret az ún. potenciálemélet segítségével írhatjuk le:

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t)}{\partial t} - \text{grad}\Phi(\vec{\mathbf{r}}, t), \quad (2.1)$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \text{rot}\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t), \quad (2.2)$$

ahol $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ az ún. vektorpotenciál, mely kielégíti a

$$\Delta \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad \text{div}\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = 0 \quad (2.3)$$

hullámgörvényleteket és a Coulomb-mérték feltételt¹.

¹A Coulomb-mérték egy gyakran alkalmazott rögzítési mód, ahol a vektorpotenciált divergenciamentesnek választjuk és megköveteljük, hogy a végtelenben tartson zérushoz.

A továbbiakban feltételezzük, hogy a sugárzási tér sugárforrásmentes, azaz nincs töltéssel rendelkező dielektrikum, amely azt jelenti, hogy az elektromos és mágneses térerősséget szabad elektromágneses térben tárgyaljuk, így a $\Phi(\vec{\mathbf{r}}, t)$ skalárpotenciál zérus lesz. A vektorpotenciállal meghatározhatók a Maxwell-egyenletek:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) - \underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{grad}\Phi(\vec{\mathbf{r}}, t))}_{=\Delta\Phi(\vec{\mathbf{r}}, t)=0} = 0, \\ \operatorname{div}\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) &= \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t)) = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) - \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\Phi(\vec{\mathbf{r}}, t)) = -\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t)}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) &= \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t)) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t)) - \Delta\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t)}{\partial t}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Módusfelbontás során a vektorpotenciált felírjuk adott polarizációjú síkhullámokra:

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \sum_{\vec{\mathbf{k}}} \sum_{\lambda=1,2} \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \cdot \left[A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}(t) \cdot e^{i\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}}} + A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}^*(t) \cdot e^{-i\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}}} \right],\tag{2.5}$$

ahol $\vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}$ a valós polarizációs vektor, amely kielégíti az ortogonalitási feltételeket:

$$\vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \cdot \vec{\mathbf{k}} = 0,\tag{2.6}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'},\tag{2.7}$$

a λ a index két független polarizációs irányt jelöli, az $A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}$ komplex amplitúdók kielégítik a harmonikus oszcillátor mozgásegyenletét:

$$\frac{d^2 A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}(t)}{dt^2} + \omega_k^2 A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}(t) = 0,\tag{2.8}$$

melynek általános megoldása: $A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}(t) = A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \cdot e^{-i\omega_k t}$, ahol $\omega_k = ck$ a körfrekvencia. A vektorpotenciált leíró (2.5) összefüggést behelyettesítve az elektromos térerősséget leíró (2.1) és a mágneses térerősséget leíró (2.2) képletekbe a következőket kapjuk:

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \sum_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}(\vec{\mathbf{r}}, t) = i \cdot \sum_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \omega_k \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \cdot \left[A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \cdot e^{i(\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \omega_k t)} - A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}^* \cdot e^{-i(\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \omega_k t)} \right],\tag{2.9}$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \sum_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \cdot \vec{\mathbf{B}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}(\vec{\mathbf{r}}, t) = i \cdot \sum_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \cdot \left[A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \cdot e^{i(\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \omega_k t)} - A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}^* \cdot e^{-i(\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \omega_k t)} \right].\tag{2.10}$$

Az ω_k sajátértékekhez tartozó $\vec{\mathbf{E}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}(\vec{\mathbf{r}}, t)$, $\vec{\mathbf{B}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ sajátfüggvényeket módusfüggvényeknek, a különböző módusfüggvényekhez tartozó harmonikus oszcillátorokat módusoknak

nevezzük. A mágneses térerősséget leíró (2.10) képlet meghatározásához az alábbi vektorazonosság szükséges:

$$\text{rot}\left(\vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \cdot e^{\pm i\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}}}\right) = e^{\pm i\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}}} \cdot \underbrace{\text{rot}\left(\vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}\right)}_{=0} + \underbrace{\text{grad}\left(e^{\pm i\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}}}\right)}_{=\pm i\vec{\mathbf{k}}e^{\pm i\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}}}} \times \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} = \pm i e^{\pm i\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}}} \cdot \left(\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}\right). \quad (2.11)$$

Az elektromos és a mágneses térerősség függvényében a teljes sugárzási tér energiáját a következőképp írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} H &= \int_V \mathbb{H} \, dV = \frac{1}{2} \int_V \left[\varepsilon_0 |\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t)|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t)|^2 \right] dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \sum_{\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{k}}'} \sum_{\lambda} \left[\varepsilon_0^2 \omega_k^2 \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}}',\lambda} + \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \cdot \vec{\mathbf{k}}' \times \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}}',\lambda} \right] \times \\ &\quad \times \left(A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} A_{\vec{\mathbf{k}}',\lambda}^* e^{i[\vec{\mathbf{k}}-\vec{\mathbf{k}}']\vec{\mathbf{r}}} + A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}^* A_{\vec{\mathbf{k}}',\lambda} e^{-i[\vec{\mathbf{k}}-\vec{\mathbf{k}}']\vec{\mathbf{r}}} - \right. \\ &\quad \left. - A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} A_{\vec{\mathbf{k}}',\lambda} e^{i[\vec{\mathbf{k}}+\vec{\mathbf{k}}']\vec{\mathbf{r}}} \cdot e^{-2i\omega_k t} - A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}^* A_{\vec{\mathbf{k}}',\lambda}^* e^{-i[\vec{\mathbf{k}}+\vec{\mathbf{k}}']\vec{\mathbf{r}}} \cdot e^{2i\omega_k t} \right) dV = \\ &= \frac{V}{2} \sum_{\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{k}}'} \sum_{\lambda} \left[\left(A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}^* + A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}^* A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \right) \left(\varepsilon_0 \omega_k^2 \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} + \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \cdot \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} A_{-\vec{\mathbf{k}},\lambda} e^{-2i\omega_k t} + A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}^* A_{-\vec{\mathbf{k}},\lambda}^* e^{2i\omega_k t} \right) \left(\varepsilon_0 \omega_k^2 \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \vec{\mathbf{e}}_{-\vec{\mathbf{k}},\lambda} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \cdot \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{e}}_{-\vec{\mathbf{k}},\lambda} \right) \right] = \\ &= 2\varepsilon_0 V \cdot \sum_{\vec{\mathbf{k}}} \sum_{\lambda} \omega_k^2 \cdot |A_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}|^2 \equiv \frac{1}{2} \sum_{\vec{\mathbf{k}}} \sum_{\lambda} \left(p_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}^2 + \omega_k^2 x_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}^2 \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

ahol \mathbb{H} a Hamilton-sűrűségfüggvény, amely az elektromos, valamint a mágneses energia-sűrűség összege, $p_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}$ az impulzus, $x_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}$ a helykoordináta. A teljes sugárzási tér energiájának meghatározásához az alábbi összefüggések használata szükséges:

$$\int_V e^{\pm i(\vec{\mathbf{k}} \mp \vec{\mathbf{k}}')\vec{\mathbf{r}}} dV = V \delta_{\vec{\mathbf{k}}, \pm \vec{\mathbf{k}}'}, \quad (2.13)$$

$$\left(\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda}\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{e}}_{\pm \vec{\mathbf{k}},\lambda'}\right) = k^2 \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\pm \vec{\mathbf{k}},\lambda'} = \mu_0 \varepsilon_0 \omega_k^2 \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\vec{\mathbf{k}},\lambda} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\pm \vec{\mathbf{k}},\lambda'}, \quad (2.14)$$

ahol $\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = |\vec{\mathbf{k}}| \cdot |\vec{\mathbf{k}}| \cdot \cos 0^\circ = k^2$. A továbbiakban a módusindexet k -val jelöljük, $k = (\vec{\mathbf{k}}, \lambda)$.

A következő lépés a kanonikus kvantálás, mely során minden mérhető fizikai mennyiséghez önadjungált, azaz hermitikus operátort rendelünk, mivel a kvantummechanika szabálya szerint a fizikai mennyiségek (mérhető mennyiségek) önadjungált operátorokkal írhatók le, és a fizikai mennyiségekhez rendelt operátor sajátértékei megegyeznek a fizikai mennyiségek mérésekor lehetséges értékekkel. A teljes sugárzási teret leíró (2.12)

képletben szereplő x_k helykoordinátákhoz és p_k impulzusokhoz rendelt operátorokat $\hat{\mathbf{x}}_k$ -val és $\hat{\mathbf{p}}_k$ -val jelöljük, amelyekre teljesül a

$$[\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{p}}_{k'}] = \hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{p}}_{k'} - \hat{\mathbf{p}}_{k'} \hat{\mathbf{x}}_k = i\hbar \delta_{k,k'} \quad (2.15)$$

kanonikus felcserélési (más néven kommutációs) reláció, valamint a

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_k \Delta \hat{\mathbf{p}}_k \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.16)$$

Heisenberg-féle határozatlansági reláció. A helykoordináta- és impulzusoperátorok függvényében vezessük be a másodkvantált (nem hermitikus) operátorokat, amelyeket fotoneltüntető és fotonkeltő operátoroknak nevezünk:

$$\hat{\mathbf{a}}_k = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (\omega_k \hat{\mathbf{x}}_k + i\hat{\mathbf{p}}_k), \quad (2.17)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (\omega_k \hat{\mathbf{x}}_k - i\hat{\mathbf{p}}_k), \quad (2.18)$$

melyek bevezetésével egyszerűvé válnak az olyan kvantummechanikai problémák, mint például a sokrészecske-rendszerek kezelése, benne részecskék keltése, illetve eltüntetése. Az A_k komplex amplitúdókhoz rendelt operátorokat $\hat{\mathbf{A}}_k$ -val jelöljük, és a (2.12), (2.17) és (2.18) képletek alapján kifejezhető a fotoneltüntető operátorokkal:

$$\hat{\mathbf{A}}_k = \frac{1}{2\omega_k \sqrt{\varepsilon_0 V}} (\omega_k \hat{\mathbf{x}}_k + i\hat{\mathbf{p}}_k) = \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{a}}_k. \quad (2.19)$$

A fotoneltüntető és fotonkeltő operátorok szintén kielégítik a felcserélési relációt:

$$[\hat{\mathbf{a}}_k, \hat{\mathbf{a}}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}. \quad (2.20)$$

Heisenberg-képben az operátorok időtől függenek (de az egyszerűség kedvéért nem függ az időtől explicite), ebben az esetben egy tetszőleges $\hat{\mathcal{O}}$ operátor időváltozását a

$$\frac{d\hat{\mathcal{O}}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathcal{O}}] + \underbrace{\frac{\partial \hat{\mathcal{O}}}{\partial t}}_{=0} \quad (2.21)$$

Heisenberg-egyenlet írja le, így a fotoneltüntető és fotonkeltő operátorok időfüggését a következő alakban fejezhetjük ki:

$$\hat{\mathbf{a}}_k(t) = \hat{\mathbf{a}}_k \cdot e^{-i\omega_k t}, \quad (2.22)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger(t) = \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger \cdot e^{i\omega_k t}. \quad (2.23)$$

A fotoneltüntető és -keltő operátorok elforgatott eseteit a következő definíció írja le:

$$\hat{\mathbf{a}}_k(\vartheta) = \hat{\mathbf{R}}^\dagger(\vartheta)\hat{\mathbf{a}}_k\hat{\mathbf{R}}(\vartheta) = \hat{\mathbf{a}}_k \cdot e^{-i\vartheta}, \quad (2.24)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger(\vartheta) = \hat{\mathbf{R}}^\dagger(\vartheta)\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger\hat{\mathbf{R}}(\vartheta) = \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger \cdot e^{i\vartheta}, \quad (2.25)$$

ahol $\hat{\mathbf{R}}(\vartheta) = \exp(-i\vartheta\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger\hat{\mathbf{a}}_k)$ az ún. fázistolás-operátor, amely unitér, és ϑ pedig a fázisszög.

Bizonyításához az ún. Baker-Hausdorff lemma általános képlete szükséges:

$$e^{\pm\hat{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{B}}e^{\mp\hat{\mathbf{A}}} = \hat{\mathbf{B}} \pm [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] + \frac{1}{2!} [\hat{\mathbf{A}}, [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]] \pm \frac{1}{3!} [\hat{\mathbf{A}}, [\hat{\mathbf{A}}, [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]]] \pm \dots \quad (2.26)$$

A fenti összefüggések alapján a normált elektromos és mágneses térerősséghez rendelt operátorok a következőképpen írhatók fel:

$$\hat{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \sum_k \vec{\mathbf{e}}_k \cdot \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\hat{\mathbf{a}}_k e^{-i\chi_k(\vec{\mathbf{r}}, t)} + \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger e^{i\chi_k(\vec{\mathbf{r}}, t)} \right], \quad (2.27)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \sum_k \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{e}}_k \cdot \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\hat{\mathbf{a}}_k e^{-i\chi_k(\vec{\mathbf{r}}, t)} + \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger e^{i\chi_k(\vec{\mathbf{r}}, t)} \right], \quad (2.28)$$

ahol $\chi_k(\vec{\mathbf{r}}, t) = \omega_k t - \vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \frac{\pi}{2}$, valamint a Hamilton-függvényhez rendelt Hamilton-operátor a fotoneltüntető és fotonkeltő operátorokkal kifejezve:

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger \hat{\mathbf{a}}_k + \frac{1}{2} \right), \quad (2.29)$$

ahol a $\hbar\omega_k$ energiakvantumot fotonnak nevezzük, amely az elektromágneses sugárzási tér módusainak az elemi gerjesztései. Az $\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger \hat{\mathbf{a}}_k$ szorzatot fotonszám-operátornak hívjuk, melyet \hat{n}_k -val is szokás jelölni. A Hamilton-operátort leíró (2.29) képlet alapján könnyen belátható, hogy a sugárzási tér energiája az oszcillátorenergiák összegeként áll elő.

A továbbiakban jelöljük $|\{n_k\}\rangle = \prod_k |n_k\rangle$ -val a sugárzási tér energia-sajátállapotait E_{n_k} sajátértékekkel:

$$\hat{\mathbf{H}}|\{n_k\}\rangle = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{n}_k + \frac{1}{2} \right) |\{n_k\}\rangle = E_{n_k} |\{n_k\}\rangle. \quad (2.30)$$

Ennek ismeretében a sugárzási tér energia-sajátállapota fotonszámállapotban:

$$E_{n_k} = \langle \{n_k\} | \hat{\mathbf{H}} | \{n_k\} \rangle = \sum_k \hbar\omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right), \quad (2.31)$$

ahol $n = 0$ esetben az alapállapot energiát kapjuk, $n > 0$ esetben az energiakvantumok diszkrét. Ha az egyenletet balról megszorozzuk az $\hat{\mathbf{a}}_k$ fotoneltüntető operátorral:

$$\sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger \hat{\mathbf{a}}_k + \frac{1}{2} \right) \hat{\mathbf{a}}_k |\{n_k\}\rangle = \sum_k (E_{n_k} - \hbar\omega_k) \hat{\mathbf{a}}_k |\{n_k\}\rangle, \quad (2.32)$$

akkor azt kapjuk, hogy az $\hat{\mathbf{a}}_k | \{n_k\} \rangle$ is egy sajátállapotnak tekinthető $E_{n_k} - \hbar\omega_k$ sajátértékekkel, amely azt jelenti, hogy a tér gerjesztettségéből a „fotoneltüntető” operátor egy fotont kivisz. Innen ered a fotoneltüntető operátor elnevezés. Hasonló módon magyarázható a „fotonkeltő operátor” elnevezés is:

$$\sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger \hat{\mathbf{a}}_k + \frac{1}{2} \right) \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger | \{n_k\} \rangle = \sum_k (E_{n_k} + \hbar\omega_k) \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger | \{n_k\} \rangle. \quad (2.33)$$

ahol $\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger | \{n_k\} \rangle$ is egy sajátállapot $E_{n_k} + \hbar\omega_k$ sajátértékkel, azaz a tér gerjesztettségéhez egy fotont hozzáad. A legalacsonyabb energia-sajátérték a következő módon írható le: mivel a Hamilton-operátor spektruma alulról korlátos, léteznie kell egy olyan $|\psi_0\rangle$ -al jelölt sajátfüggvénynek, amit az $\hat{\mathbf{a}}_k$ fotoneltüntető operátor a Hilbert-tér null-elemébe léptet, melynek normája zérus, ezért (a kvantummechanika szerint) nem reprezentálhat fizikai állapotot. Ebben az esetben a Hamilton-operátor várható értéke a $|\psi_0\rangle$ bázisban:

$$\langle \hat{\mathbf{H}} \rangle_{\psi_0} = \sum_k \hbar\omega_k \left(\langle \psi_0 | \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger \hat{\mathbf{a}}_k | \psi_0 \rangle + \frac{1}{2} \right) = \sum_k \hbar\omega_k \left(\langle \hat{\mathbf{a}}_k \psi_0 | \hat{\mathbf{a}}_k \psi_0 \rangle + \frac{1}{2} \right) \geq \frac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_k. \quad (2.34)$$

Ennek ismeretében könnyen beláthatjuk, hogy a minimális sajátértékhez tartozó sajátfüggvény az ún. fotonvákuum vagy más néven a vákuumállapot (amely a gerjesztettség nélküli állapotot jelenti), amit $|\{0\}\rangle$ -val jelölünk, és az $\hat{\mathbf{a}}_k |\{0\}\rangle = \mathbf{0}$ kényszerfeltétel mellett:

$$\hat{\mathbf{H}} |\{0\}\rangle = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger \hat{\mathbf{a}}_k + \frac{1}{2} \right) |\{0\}\rangle = \frac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_k |\{0\}\rangle. \quad (2.35)$$

A fotoneltüntető és fotonkeltő operátor hatása a fotonszámállapotra:

$$\hat{\mathbf{a}}_k | \{n_k\} \rangle = \sqrt{n_k} | n_1, n_2, \dots, n_k - 1, \dots \rangle, \quad (2.36)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger | \{n_k\} \rangle = \sqrt{n_k + 1} | n_1, n_2, \dots, n_k + 1, \dots \rangle. \quad (2.37)$$

Ezek ismeretében a fotoneltüntető és fotonkeltő operátorok mátrixalakban:

$$\hat{\mathbf{a}}_k = \hat{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{a}}_k \hat{\mathbf{I}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} | \{n_k\} \rangle \langle \{n_k\} | \hat{\mathbf{a}}_k | \{m_k\} \rangle \langle \{m_k\} | = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n_k + 1} | \{n_k\} \rangle \langle \{n_k + 1\} |, \quad (2.38)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n_k + 1} | \{n_k + 1\} \rangle \langle \{n_k\} |. \quad (2.39)$$

Fotonszámállapotban a Heisenberg-féle határozatlansági reláció:

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_k \Delta \hat{\mathbf{p}}_k = \hbar \left(n_k + \frac{1}{2} \right), \quad (2.40)$$

ahol $n = 0$ esetben, azaz vákuumállapotban minimális a bizonytalanság. A fotonkeltő operátor alkalmazásával a fotonszámállapot általános képlete:

$$|\{n_k\}\rangle = \prod_k \frac{(\mathbf{a}_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |0_k\rangle \in L^2(\mathbb{R}), \quad (2.41)$$

azaz a fotonszámállapot a vákuumállapotból állítható elő ismételt gerjesztéssel a fotonkeltő operátorral. A fotonszám-operátorok sajátállapotai a fotonszámállapotok, azaz

$$\hat{\mathbf{n}}_k |\{n_k\}\rangle = n_k |\{n_k\}\rangle. \quad (2.42)$$

Ha a k indexű módus $|\{n_k\}\rangle$ sajátállapotban van, akkor azt mondjuk, hogy a kvantálási térfogatban n_k darab $\vec{\mathbf{k}}$ hullámszámvektorú foton van. Fotonszámállapotban az elektromos térerősség szórása (fluktuáció):

$$\Delta \hat{\mathbf{E}}_k(\vec{\mathbf{r}}, t) = \left[\langle \hat{\mathbf{E}}_k(\vec{\mathbf{r}}, t)^2 \rangle - \underbrace{\langle \hat{\mathbf{E}}_k(\vec{\mathbf{r}}, t) \rangle^2}_{=0} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\hbar \omega_k}{\epsilon_0 V} \left(n_k + \frac{1}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.43)$$

amelyet szokás az elektromos térerősség bizonytalanságának nevezni, ahol az elektromos térerősség várható értéke, azaz az átlagtér zérus. Jegyezzük meg, hogy az $n = 0$ esetben is van az elektromos térerősségnek fluktuációja, melyet vákuumfluktuációnak nevezünk. Eszerint a vákuumbeli sugárzási tér elektromágneses térerőssége zérus középérték körül állandóan ingadozik, más szóval „fluktuál”.

A sugárzási tér, a harmonikus oszcillátor tiszta állapotát a $|\{\varphi_k\}\rangle$ állapotvektorok írják le, kevert állapotát a $\hat{\varrho}_k$ sűrűségoperátor jellemzi. A gyakorlatban ezen absztrakt mennyiségek különböző reprezentációit használjuk. A leggyakrabban használt bázist a (2.30) által definiált fotonszámállapotok adják, amelyek teljes ortonormált rendszert alkotnak a harmonikus oszcillátor Hilbert-terében:

$$\langle \{n_k\} | \{m_k\} \rangle = \prod_k \delta_{n_k m_k}, \quad \sum_{n_k} |\{n_k\}\rangle \langle \{n_k\}| = \hat{\mathbf{I}}, \quad (2.44)$$

ahol $\hat{\mathbf{I}}$ az egységoperátor. Egy tetszőleges $|\{\varphi_k\}\rangle$ állapot megadható a

$$|\{\varphi_k\}\rangle = \sum_{n_k} c_{n_k} |\{n_k\}\rangle, \quad c_{n_k} = \langle \{n_k\} | \{\varphi_k\} \rangle, \quad \sum_{n_k} |c_{n_k}|^2 = 1 \quad (2.45)$$

fotonszámállapotok szerinti kifejtési alakban.

A (2.27), (2.28) és (2.29) összefüggések fejezik ki a fény kettős természetét. A térbeli viselkedés, a hullámtulajdonságok a klasszikus módussorfejtésből kapott periodikus $\exp[i(\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \omega_k t)]$ módusfüggvényekben nyilvánulnak meg a (2.27) és (2.28) egyenletekben, de a módusok energiája az (2.12) miatt csak kvantumosan, azaz „adagokban” változhat. A normálmódusokhoz rendelt harmonikus oszcillátorok helykoordináta, valamint impulzusoperátorai az elektromágneses tér oszcillációját írják le, nem pedig a foton térbeli mozgását. A (2.35) és a (2.42) egyenletek alapján vákuumállapotban a sugárzási tér energiája végtelen, ez azonban az elmélet gyakorlati következtetésében, a mérhető fizikai mennyiségekben, hasonlóan a V kvantálási térfogathoz, nem okoz problémát.

Az optikai fázisdiagram (vagy fázistér) koordinátatengelyeinek leírásához vezessük be az ún. kvadratúraoperátorokat:

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \text{Re}(\hat{\mathbf{a}}_k) = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}} \hat{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{a}}_k + \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger), \quad (2.46)$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_k = \text{Im}(\hat{\mathbf{a}}_k) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} \hat{\mathbf{p}}_k = \frac{1}{2i} (\hat{\mathbf{a}}_k - \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger), \quad (2.47)$$

melyeknek az elforgatott esetei:

$$\hat{\mathbf{X}}_k(\vartheta) = \hat{\mathbf{R}}^\dagger(\vartheta) \hat{\mathbf{X}}_k \hat{\mathbf{R}}(\vartheta) = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{a}}_k e^{-i\vartheta} + \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger e^{i\vartheta}) = \hat{\mathbf{X}} \cos(\vartheta) + \hat{\mathbf{Y}} \sin(\vartheta), \quad (2.48)$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_k(\vartheta) = \hat{\mathbf{R}}^\dagger(\vartheta) \hat{\mathbf{Y}}_k \hat{\mathbf{R}}(\vartheta) = \hat{\mathbf{X}} \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2i} (\hat{\mathbf{a}}_k e^{-i\vartheta} - \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger e^{i\vartheta}) = \hat{\mathbf{Y}} \cos(\vartheta) - \hat{\mathbf{X}} \sin(\vartheta). \quad (2.49)$$

A kvadratúraoperátorok kielégítik a felcserélési relációt:

$$[\hat{\mathbf{X}}_k, \hat{\mathbf{Y}}_{k'}] = \frac{i}{2} \delta_{k,k'}, \quad (2.50)$$

valamint szórásaikra bármely állapotban teljesül a

$$\Delta \hat{\mathbf{X}}_k \Delta \hat{\mathbf{Y}}_k \geq \frac{1}{4} \quad (2.51)$$

Heisenberg-féle határozatlansági reláció, mivel a kvadratúrák kanonikusan konjugáltak (nem mérhetők egyszerre teljes pontossággal), amely vákuumállapotban egyenlőségként teljesül. Az elektromos és mágneses térerősség a kvadratúraoperátorokkal kifejezve:

$$\hat{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \sum_k \vec{\mathbf{e}}_k \cdot \left(\frac{2\hbar\omega_k}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot [\hat{\mathbf{X}}_k \cos(\chi_k(\vec{\mathbf{r}}, t)) + \hat{\mathbf{Y}}_k \sin(\chi_k(\vec{\mathbf{r}}, t))], \quad (2.52)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \sum_k \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{e}}_k \cdot \left(\frac{2\hbar}{\omega_k \epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot [\hat{\mathbf{X}}_k \cos(\chi_k(\vec{\mathbf{r}}, t)) + \hat{\mathbf{Y}}_k \sin(\chi_k(\vec{\mathbf{r}}, t))], \quad (2.53)$$

valamint a teljes sugárzási tér Hamilton-operátora:

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_k \hbar\omega_k (\hat{\mathbf{X}}_k^2 + \hat{\mathbf{Y}}_k^2). \quad (2.54)$$

A kvadratúrákkal tehát az elektromágneses sugárzási tér rezgéseit a klasszikus eljárásnak megfelelően két, $\frac{\pi}{2}$ fáziskülönbségű, egymásra merőlegesen oszcilláló mennyiségre bontjuk. A továbbiakban a sugárzási tér egyetlen módusával foglalkozunk, azaz elhagyhatjuk a k módusindexet, mert a megvalósítható kísérleti elrendezések többségének leírásához is elegendő.

2.2. Fázisoperátorok

Az eddig bevezett fizikai mennyiségeken kívül említsük meg fázis kvantumelméletének leírását, amely nem triviális probléma. Adódhat a kérdés, hogy létezhet olyan megfigyelhető mennyiség a fázisnak, amelyhez egy hermitikus operátort rendelhetünk. A klasszikus optikában azt tudjuk, hogy az elektromágneses sugárzási tér fázisa egy megfigyelhető mennyiség. Ennélfogva a kvantumoptikában egy hermitikus operátor rendelhető hozzá.

Egy z komplex szám felírható például polárkoordinátákban, azaz $z = |z|e^{i\phi} = \sqrt{z^*z}e^{i\phi}$. Ennek alapján Paul Dirac a fotoneltüntető és -keltő operátort az alábbi módon definiálta:

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{r}}e^{i\hat{\phi}}, \quad (2.55)$$

$$\hat{\mathbf{a}}^\dagger = e^{-i\hat{\phi}}\hat{\mathbf{r}}, \quad (2.56)$$

ahol a $\hat{\phi}$ ún. fázisoperátor lenne a fázishoz rendelt hermitikus operátor. Az $\hat{\mathbf{r}}$ operátor meghatározásához feltételezzük, hogy az $\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^\dagger$ szorzatot a következő módon tudjuk meghatározni:

$$\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^\dagger = \hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}} + 1 = \hat{\mathbf{r}}^2 \rightarrow \hat{\mathbf{r}} = \left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.57)$$

Ennek ismeretében az exponenciális fázisoperátorokat

$$e^{i\hat{\phi}} = \frac{1}{\left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}}\hat{\mathbf{a}}, \quad (2.58)$$

$$e^{-i\hat{\phi}} = \hat{\mathbf{a}}^\dagger \frac{1}{\left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.59)$$

alakban írhatjuk fel. Az exponenciális fázisoperátorok felhasználásával ellenőrizzük az, hogy unitérek-e:

$$e^{i\hat{\phi}}e^{-i\hat{\phi}} = \frac{1}{(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}+1)^{\frac{1}{2}}}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^\dagger\frac{1}{(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}+1}{(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}+1)^{\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}+1)^{\frac{1}{2}}} = 1, \quad (2.60)$$

$$e^{-i\hat{\phi}}e^{i\hat{\phi}} = \hat{\mathbf{a}}^\dagger\frac{1}{\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}+1}\hat{\mathbf{a}} \neq 1. \quad (2.61)$$

Azt kaptuk, hogy az exponenciális fázisoperátor nem unitér, amelyből következik, hogy a fázisoperátor nem hermitikus.

Susskind-Glogower fázisoperátor

Leonard Susskind és Jonathan Glogower amerikai fizikusok az exponenciális fázisoperátorok alkalmazásával bevezettek új fázisoperátorokat:

$$\cos \hat{\phi} = \frac{1}{2}(e^{i\hat{\phi}} + e^{-i\hat{\phi}}), \quad (2.62)$$

$$\sin \hat{\phi} = \frac{1}{2i}(e^{i\hat{\phi}} - e^{-i\hat{\phi}}), \quad (2.63)$$

mely operátorok már hermitikusak úgy, hogy az exponenciális fázisoperátor nem unitér. Ennek bizonyításához fel kell használnunk, hogy egy adott $\hat{\mathbf{A}}$ hermitikus operátorhoz tartozó mátrix elemei:

$$\langle i|\hat{\mathbf{A}}|j\rangle = \langle j|\hat{\mathbf{A}}|i\rangle^*. \quad (2.64)$$

Először határozzuk meg az exponenciális fázisoperátor hatását a fotonszámállapotra:

$$e^{i\hat{\phi}}|n\rangle = \frac{1}{(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}+1)^{\frac{1}{2}}}\hat{\mathbf{a}}|n\rangle = \frac{1}{(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}+1)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{n}|n-1\rangle = \frac{1}{(n-1+1)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{n}|n-1\rangle = |n-1\rangle, \quad (2.65)$$

$$e^{-i\hat{\phi}}|n\rangle = \hat{\mathbf{a}}^\dagger\frac{1}{(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}+1)^{\frac{1}{2}}}|n\rangle = \hat{\mathbf{a}}^\dagger\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}}|n\rangle = \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{n+1}|n+1\rangle = |n+1\rangle. \quad (2.66)$$

Fontos megjegyezni, hogy $e^{i\hat{\phi}}|n\rangle = 0$, ha $n = 0$. Ennek ismeretében könnyen belátható, hogy a $\cos \hat{\phi}$ és $\sin \hat{\phi}$ fázisoperátorok nem nulla mátrix elemek:

$$\langle n-1|\cos \hat{\phi}|n\rangle = \langle n|\cos \hat{\phi}|n-1\rangle = \frac{1}{2}, \quad (2.67)$$

$$\langle n-1|\sin \hat{\phi}|n\rangle = -\langle n|\sin \hat{\phi}|n-1\rangle = \frac{1}{2i}. \quad (2.68)$$

Ebből arra lehet következtetni, hogy a $\cos \hat{\phi}$ és a $\sin \hat{\phi}$ fázisoperátorok hermitikusak és reprezentálhatják az elektromágneses sugárzási tér megfigyelhető fázisának a tulajdonságait. A két fázisoperátor tulajdonságait tekintve nem kommutálnak egymással:

$$[\cos \hat{\phi}, \sin \hat{\phi}] = \frac{1}{2i} (e^{-i\hat{\phi}} e^{i\hat{\phi}} - e^{i\hat{\phi}} e^{-i\hat{\phi}}) = \frac{1}{2i} \left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger \frac{1}{\hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}} + 1} \hat{\mathbf{a}} - 1 \right). \quad (2.69)$$

Ennek alapján a kommutátor mátrix elemei

$$\langle m | [\cos \hat{\phi}, \sin \hat{\phi}] | n \rangle = \frac{1}{2i} (\langle m | e^{-i\hat{\phi}} e^{i\hat{\phi}} | n \rangle - \delta_{m,n}) = \begin{cases} 0, & (n \neq 0) \\ -\frac{1}{2i} \delta_{m,0}, & (n = 0) \end{cases} \quad (2.70)$$

szerint alakulnak. További kommutációs relációtulajdonságok a következők fotonszám-állapot-reprezentációban:

$$[\hat{\mathbf{n}}, \cos \hat{\phi}] | n \rangle = \frac{1}{2} ([\hat{\mathbf{n}}, e^{i\hat{\phi}}] + [\hat{\mathbf{n}}, e^{-i\hat{\phi}}]) | n \rangle = \frac{1}{2} (-e^{i\hat{\phi}} + e^{-i\hat{\phi}}) | n \rangle = -i \sin \hat{\phi} | n \rangle, \quad (2.71)$$

$$[\hat{\mathbf{n}}, \sin \hat{\phi}] | n \rangle = i \cos \hat{\phi} | n \rangle. \quad (2.72)$$

Ebből megállapíthatjuk, hogy fotonszám- és a fázisoperátorok nem cserélhetők fel, amely azt jelenti, hogy nem lehetséges az elektromágneses sugárzási térnek egy olyan állapot-halmazát felírni oly módon, hogy a $\cos \hat{\phi}$ és $\sin \hat{\phi}$ fázisoperátor szimultán sajátfüggvényei legyenek. A fotonszám- és a $\cos \hat{\phi}$, illetve $\sin \hat{\phi}$ fázisoperátorra a következő Heisenberg-féle határozatlansági összefüggés teljesül:

$$\Delta \hat{\mathbf{n}} \Delta \cos \hat{\phi} \geq \frac{1}{2} |\sin \hat{\phi}|, \quad (2.73)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{n}} \Delta \sin \hat{\phi} \geq \frac{1}{2} |\cos \hat{\phi}|. \quad (2.74)$$

Fotonszámállapotban a fotonszám-operátor szórása és a két fázisoperátor középértéke zérus, a két fázisoperátor szórása ($n \geq 1$ esetben) pedig

$$(\Delta \cos \hat{\phi})_n = (\Delta \sin \hat{\phi})_n = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.75)$$

A következőkben ismét felhasználjuk az exponenciális fázisoperátort, melynek segítségével egy új exponenciális fázisoperátort vezetünk be, ezzel eltüntetve a nem unitér tulajdonságot:

$$\hat{\mathbf{V}} = e^{i\hat{\phi}} = \sum_n |n\rangle \langle n| e^{i\hat{\phi}} = \sum_n |n\rangle \langle n+1|, \quad (2.76)$$

$$\hat{\mathbf{V}}^\dagger = e^{-i\hat{\phi}} = \sum_n e^{-i\hat{\phi}} |n\rangle \langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle \langle n|, \quad (2.77)$$

így ezek szorzatuk:

$$\hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{V}}^\dagger = \sum_{n,m} |n\rangle\langle n+1|m+1\rangle\langle n| = \sum_n |n\rangle\langle n| = \hat{\mathbf{I}}, \quad (2.78)$$

$$\hat{\mathbf{V}}^\dagger\hat{\mathbf{V}} = \sum_{n,m} |n+1\rangle\langle n|m\rangle\langle n+1| = \sum_n |n+1\rangle\langle n+1| = \hat{\mathbf{I}} - |0\rangle\langle 0|. \quad (2.79)$$

Sajnos a $\hat{\mathbf{V}}$ exponenciális fázisoperátor még mindig nem unitér. Ennek a problémának a kiküszöbölésére az összegzés alsó határát változtatjuk meg úgy, hogy

$$\hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{V}}^\dagger = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |n\rangle\langle n+1|m+1\rangle\langle n| = \hat{\mathbf{I}}, \quad (2.80)$$

$$\hat{\mathbf{V}}^\dagger\hat{\mathbf{V}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |n+1\rangle\langle n+1| = \hat{\mathbf{I}}. \quad (2.81)$$

Ebben az esetben a $\hat{\mathbf{V}}$ fázisoperátor unitér, így a $\hat{\phi}$ fázisoperátor hermitikus lesz. Ha a $\hat{\phi}$ operátor hermitikus, akkor létezik sajátállapota, amely teljesíti az alábbi sajátérték-egyenletet:

$$\hat{\mathbf{V}}|\Phi\rangle = e^{i\phi}|\Phi\rangle. \quad (2.82)$$

A $|\Phi\rangle$ fázis-sajátállapotot felírva fotonszámállapot-reprezentációban, azaz

$$\hat{\mathbf{V}}|\Phi\rangle = \sum_n c_n \hat{\mathbf{V}}|n\rangle = \sum_{n,m} c_n |m\rangle\langle m+1|n\rangle = \sum_n c_n |n-1\rangle \equiv \sum_n c_{n+1}|n\rangle = \sum_n c_n e^{i\phi}|n\rangle, \quad (2.83)$$

amelyből megkapjuk, hogy $c_{n+1} = c_n e^{i\phi}$. Legyen a kiinduló pont c_0 , így rekurzív eljárással a c_n együttható a következőképp alakul:

$$c_n = c_0 e^{in\phi}. \quad (2.84)$$

Ennek ismeretében a $|\Phi\rangle$ fázis-sajátállapotot

$$|\Phi\rangle = c_0 \cdot \sum_n e^{in\phi}|n\rangle \quad (2.85)$$

szerint írhatjuk fel, ahol a c_0 együtthatót a normából határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\Phi\rangle\langle\Phi| d\phi &= c_0^2 \cdot \sum_{n,m} |n\rangle\langle m| \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\phi} d\phi = \\ &= 2\pi \cdot c_0^2 \cdot \underbrace{\sum_{n,m} |n\rangle\langle m| \delta_{n,m}}_{=\hat{\mathbf{I}}} = 2\pi \cdot c_0^2 = 1 \rightarrow c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Így az exponenciális fázisoperátor sajátállapotának végső alakja:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_n e^{in\phi} |n\rangle. \quad (2.87)$$

A Susskind-Glogower formalizmus klasszikushoz közeli terek esetén a klasszikusnak megfelelő eredményt adja a fázisra, a vákuumhoz közeli nemklasszikus terek azonban ellentmondásos.

Pegg-Barnett fázisoperátor

A Pegg-Barnett formalizmus azért, hogy az előző leírás problémáit kiküszöbölje, $s + 1$ fotonszámállapot által kifeszített $s + 1$ dimenziós térben definiálta a fizikai mennyiségeket. Ez a formalizmus David Pegg és Stephen Barnett ausztrál és brit elméleti fizikus nevéhez fűződik. Az operátorok középértékeit és szórásait ebben a térben kell kiszámolni és csak ezután szabad végrehajtani az $s \rightarrow \infty$ határátmenetet. Az adott téren definiáljuk a hermitikus fázisoperátorokat:

$$\hat{\phi}_\theta = \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|, \quad (2.88)$$

ahol a $|\theta_m\rangle$ a $\hat{\phi}_\theta$ fázisoperátor ortogonális sajátállapotai, azaz a fázis-sajátállapotok és fázis-sajátértékek:

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \cdot \sum_{n=0}^s e^{in\theta_m} |n\rangle, \quad (2.89)$$

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2m\pi}{s+1}, \quad \text{ahol } m = 0, 1, 2, \dots, s. \quad (2.90)$$

A θ_0 referenciafázis választása tetszőleges, ez a szög jellemzi az adott alapkészletet és a $\hat{\phi}_\theta$ fázisoperátort. A referenciaértékektől való függés nem okoz problémát, a klasszikus leírásnál is jelen van. A $\hat{\phi}_\theta$ fázisoperátor felhasználásával az exponenciális fázisoperátor hatása a vákuumállapotra:

$$e^{i\hat{\phi}_\theta} |0\rangle = \exp[i(s+1)\theta_0] |s\rangle, \quad (2.91)$$

ahol $\exp[\pm i\hat{\phi}_\theta]$ exponenciális fázisoperátor unitér.

A Pegg-Barnett formalizmus, bár jól használható gyakorlati számításokhoz, vákuumhoz közeli nemklasszikus állapotok esetén is, nem tekinthető a fázisprobléma végleges lezárásának.

2.3. A kvantált elektromágneses sugárzási tér állapotai

2.3.1. Koherens állapotok

A jól ismert kvantummechanikai harmonikus oszcillátor mozgását leíró egyenlet megoldásait, a koherens állapotokat Erwin Schrödinger osztrák Nobel-díjas fizikus már 1926-ban publikálta. A koherens állapotok kvantumoptikában való használhatóságának felismerése azonban Roy Glauber amerikai Nobel-díjas fizikus érdeme. Roy Glauber egyik korszakalkotó eredménye, hogy a kvantumelektrodinamikát alkalmazta az ún. foton-detektálás leírására, valamint a fotonkorrelációs interferenciakísérletek értelmezésére. A fény koherenciátulajdonságainak jellemzésére bevezette az ún. kvantumkoherenciafüggvényeket, amelyek a megfelelő tér- és időpillanatban vett pozitív és negatív frekvenciás térerősség-operátorok ún. normálrendezett átlagértékei a sugárzási tér adott állapotában. A normálrendezés azt jelenti, hogy a negatív frekvenciás térerősség-operátorok a pozitív frekvenciás térerősségoperátoroktól balra állnak. A koherenciafüggvények segítségével definiálhatjuk a sugárzási tér koherens állapotát. Az ilyen állapotú fény teljesen összefüggő, bármely rendű interferenciára képes. A tér bármely pontjában vett, bármely rendű normált koherenciafüggvény maximális értékű. Roy Glauber megmutatta, hogy matematikailag az ilyen állapot a fotoneltüntető operátor sajátállapota:

$$\hat{\mathbf{a}}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (2.92)$$

ahol $|\alpha\rangle$ jelöli a koherens állapotot, $\alpha = |\alpha| \cdot e^{i\phi}$ a komplex amplitúdó, ϕ pedig a fázisszög. Koherens állapotok kifejezhetők fotonszámállapot-reprezentációban:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle 0|\frac{\hat{\mathbf{a}}^n}{\sqrt{n!}}|\alpha\rangle|n\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \quad (2.93)$$

A $\langle 0|\alpha\rangle$ skalárszorzat a normálási feltételből határozható meg:

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n (\alpha)^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} \underbrace{\langle n|m\rangle}_{\delta_{n,m}} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \cdot e^{|\alpha|^2} \rightarrow \langle 0|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}. \quad (2.94)$$

Fontos tulajdonsága a koherens állapotoknak, hogy nem ortogonálisak egymásra, azaz két különböző koherens állapot skalárszorzata és abszolút érték négyzetük:

$$\langle \alpha|\beta\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \alpha^* \beta\right), \quad |\langle \alpha|\beta\rangle|^2 = \exp(-|\alpha - \beta|^2), \quad (2.95)$$

viszont teljes (mégpedig „túteljes”) rendszert alkotnak az oszcillátor Hilbert-terében:

$$\begin{aligned}
\int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n! \cdot m!}} \cdot \int e^{-|\alpha|^2} \cdot \alpha^n \cdot (\alpha^*)^m d^2\alpha = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n! \cdot m!}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r^{n+m+1} dr \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi}_{=2\pi\delta_{n,m}} = \\
&= 2\pi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \cdot \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r^{2n+1} dr \stackrel{r^2:=t}{=} \pi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^n dt}_{=\Gamma(n+1)=n!} = \pi \cdot \hat{\mathbf{I}},
\end{aligned} \tag{2.96}$$

ahol a koherens állapot komplex amplitúdóját az egyszerűség kedvéért polárkoordinátákra írtuk át, azaz $\alpha = r \exp(i\varphi)$, valamint $d^2\alpha = r dr d\varphi$. Koherens állapotban a fotonszám középértéke és szórásnégyzete megegyezik és egyenlő az α komplex amplitúdó abszolút érték négyzetével:

$$\begin{aligned}
(\Delta \hat{\mathbf{n}})_{\alpha}^2 &= \langle \hat{\mathbf{n}}^2 \rangle_{\alpha} - \langle \hat{\mathbf{n}} \rangle_{\alpha}^2 = \langle \alpha | \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \hat{\mathbf{a}} | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \hat{\mathbf{a}} | \alpha \rangle^2 = \\
&= \langle \alpha | \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} (\hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \hat{\mathbf{a}} + 1) \hat{\mathbf{a}} | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \hat{\mathbf{a}} | \alpha \rangle^2 =
\end{aligned} \tag{2.97}$$

$$= \langle \alpha | \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}} | \alpha \rangle + \langle \alpha | \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \hat{\mathbf{a}} | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \hat{\mathbf{a}} | \alpha \rangle^2 = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 - |\alpha|^4 = |\alpha|^2,$$

$$\langle \hat{\mathbf{n}} \rangle_{\alpha} = \langle \alpha | \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \hat{\mathbf{a}} | \alpha \rangle = |\alpha|^2, \tag{2.98}$$

a fotonstatisztikája, azaz az n -fotonos eloszlása pedig

$$P(n) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} = \frac{\langle \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \hat{\mathbf{a}} \rangle_{\alpha}^n}{n!} e^{-\langle \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \hat{\mathbf{a}} \rangle_{\alpha}}, \tag{2.99}$$

azaz Poisson-féle diszkrét valószínűségi eloszlás. Itt érdemes megjegyezni, hogy ha egy állapot esetén $(\Delta \hat{\mathbf{n}})^2 < \langle \hat{\mathbf{n}} \rangle$, akkor szub-Poisson, ha $(\Delta \hat{\mathbf{n}})^2 > \langle \hat{\mathbf{n}} \rangle$, akkor szuper-Poisson fotonstatisztikáról beszélünk. A szub-Poisson statisztikájú fényt szokás amplitúdó-összenyomott állapotnak nevezni. Az ilyen típusú állapotokat a későbbiekben tárgyaljuk.

Az elektromos térerősségre vonatkozó (2.27) összefüggés felhasználásával az elektromos térerősség középértékére és szórására a következő összefüggéseket adhatjuk meg:

$$\langle \hat{\mathbf{E}} \rangle_{\alpha} = \left(\frac{2\hbar\omega}{\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} |\alpha| \sin(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \varphi), \tag{2.100}$$

$$\Delta \hat{\mathbf{E}}_{\alpha} = \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.101}$$

azaz a koherens állapot a klasszikus elektromágneses térnek, a monokromatikus síkhullámnak megfelelő kvantumállapot. Amplitúdója arányos a hullám amplitúdójával, fázisa pedig a hullám kezdőfázisa. A kvantumos tárgyalásból következően azonban az elektromos térerősségnek bizonytalansága van, amely fázisfüggetlen és értéke állandó, megegyezik a vákuumzajjal. Koherens állapotú fény így növekvő gerjesztettség mellett egyre jobban megfelel a klasszikus hullámnak, hiszen a kvantumzaja elhanyagolható lesz az amplitúdójához képest.

Az $\hat{\mathbf{R}}(\vartheta)$ fázistolás-operátor segítségével a koherens állapot elforgatott esetét definiálhatjuk a következő módon:

$$\hat{\mathbf{R}}(\vartheta)|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\vartheta}|n\rangle\langle n|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\vartheta})^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = |\alpha e^{-i\vartheta}\rangle, \quad (2.102)$$

ahol felhasználtuk a fázistolás-operátor mátrixbeli alakját:

$$\begin{aligned} e^{-i\vartheta\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}} &= \hat{\mathbf{I}}e^{-i\vartheta\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}}\hat{\mathbf{I}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|e^{-i\vartheta\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}}|m\rangle\langle m| = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-im\vartheta}|n\rangle\underbrace{\langle n|m\rangle}_{=\delta_{n,m}}\langle m| = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\vartheta}|n\rangle\langle n|. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Koherens állapotok segítségével az elektromágneses sugárzási tér tetszőleges kvantumállapota reprezentálható oly módon, hogy az α komplex amplitúdó által meghatározott komplex sík megfelel a kvantummechanikai fázistérnek, és ennek koordinátatengelyeit a kvadratúraoperátorok átlagértékei adják:

$$\alpha = \text{Re}(\alpha) + i \cdot \text{Im}(\alpha) = \langle \hat{\mathbf{X}} \rangle_\alpha + i \cdot \langle \hat{\mathbf{Y}} \rangle_\alpha. \quad (2.104)$$

Könnyen megállapítható, hogy koherens állapotban a Heisenberg-féle határozatlansági relációt leíró (2.51) képlet egyenlőségként teljesül, mert a kvadratúrák szórásai:

$$\Delta\hat{\mathbf{X}}_\alpha = \left[\langle \hat{\mathbf{X}}^2 \rangle_\alpha - \langle \hat{\mathbf{X}} \rangle_\alpha^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{4} (\alpha^2 + 2|\alpha|^2 + 1 + (\alpha^*)^2 - \alpha^2 - 2|\alpha|^2 - (\alpha^*)^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \quad (2.105)$$

$$\Delta\hat{\mathbf{Y}}_\alpha = \left[\langle \hat{\mathbf{Y}}^2 \rangle_\alpha - \langle \hat{\mathbf{Y}} \rangle_\alpha^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{4} (-\alpha^2 + 2|\alpha|^2 + 1 - (\alpha^*)^2 + \alpha^2 - 2|\alpha|^2 + (\alpha^*)^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \quad (2.106)$$

azaz a koherens állapotok minimális bizonytalanságú állapotoknak tekinthetők.

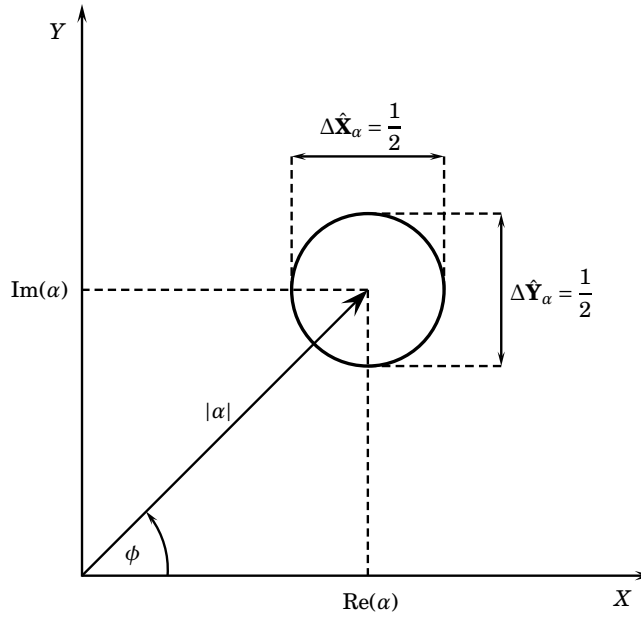
A koherens állapotok speciális fajtája az ún. fotonhozzáadott koherens állapotok, vagy más néven az Agarwal-állapotok, amely a következő definíció ír le:

$$|\alpha, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \alpha | \hat{\mathbf{a}}^m (\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^m | \alpha \rangle}} (\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^m |\alpha\rangle, \quad (2.107)$$

ahol a fotonkeltő operátor hatása a koherens állapotra:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}}^\dagger|\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n+1} |n+1\rangle = \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\alpha^n}{\sqrt{(n+1)!}} |n+1\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha^{n-1}}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\alpha^*}{2}\right)|\alpha\rangle.\end{aligned}\quad (2.108)$$

Koherens állapotot a fázistérben ábrázolva kört kapunk, melyet az 2.1. ábrán tudunk részletesen szemléltetni.



2.1. ábra. Koherens állapot bizonytalansági képe a fázistérben.

A koherens állapotot a $(\text{Re}(\alpha), \text{Im}(\alpha))$ koordinátapont jellemzi, az e körüli $\frac{1}{2}$ átmérőjű kör pedig a kvadratúrák bizonytalanságát jelképezi. Eszerint a koherens állapot felírható a vákuumállapottal, amelyet a (2.41) és a (2.93) összefüggéssel bizonyítható:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{\mathbf{a}}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \cdot e^{\alpha \hat{\mathbf{a}}^\dagger} |0\rangle. \quad (2.109)$$

Alkalmazzuk az alábbi ún. Baker-Campbell-Hausdorff formula speciális esetét:

$$e^{\hat{\mathbf{A}}} \cdot e^{\hat{\mathbf{B}}} = e^{\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}} + \frac{1}{2}[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]} \rightarrow e^{\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}} = e^{\hat{\mathbf{A}}} \cdot e^{\hat{\mathbf{B}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]}. \quad (2.110)$$

Ebben az esetben $\hat{\mathbf{A}} = \alpha \hat{\mathbf{a}}^\dagger$, valamint $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] = |\alpha|^2$, a kérdéses $\hat{\mathbf{B}}$ operátort a kommutálási relációból határozhatjuk meg:

$$\left. \begin{aligned}\hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{a}}^\dagger &= \alpha^* \\ \hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}}^\dagger &= -1\end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{\mathbf{B}} = -\alpha^* \hat{\mathbf{a}}. \quad (2.111)$$

Ennek ismeretében a koherens állapotot

$$|\alpha\rangle = \exp\left(\alpha\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \alpha^*\hat{\mathbf{a}}\right)|0\rangle = \hat{\mathbf{D}}(\alpha)|0\rangle \quad (2.112)$$

alakban írhatjuk fel, ahol $\hat{\mathbf{D}}(\alpha)$ unitér operátort koherens eltolási operátornak nevezünk, amellyel a vákuumállapotot $|\alpha|$ értékkel kitolhatjuk az origóból. Innen ered a koherens állapot egy másik elnevezése: eltolt vákuumállapot. A $\hat{\mathbf{D}}(\alpha)$ koherens eltolási operátor hatása egy $|\beta\rangle$ koherens állapotra:

$$\hat{\mathbf{D}}(\alpha)|\beta\rangle = \hat{\mathbf{D}}(\alpha)\hat{\mathbf{D}}(\beta)|0\rangle = \exp\left[\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)\right]|\alpha + \beta\rangle = e^{i\text{Im}(\alpha\beta^*)}|\alpha + \beta\rangle, \quad (2.113)$$

ahol $\hat{\mathbf{D}}(\alpha)\hat{\mathbf{D}}(\beta) \neq \hat{\mathbf{D}}(\beta)\hat{\mathbf{D}}(\alpha)$, valamint felhasználtuk, hogy $\alpha\beta^* = \text{Re}(\alpha\beta^*) + i \cdot \text{Im}(\alpha\beta^*)$ és $\alpha^*\beta = (\alpha\beta^*)^*$. A koherens eltolási operátor a fotoneltüntető és -keltő operátort, valamint a kvadratúraoperátorokat a következőképpen transzformálja:

$$\hat{\mathbf{a}} \rightarrow \hat{\mathbf{D}}^\dagger(\alpha)\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{D}}(\alpha) = \hat{\mathbf{a}} + \alpha, \quad (2.114)$$

$$\hat{\mathbf{a}}^\dagger \rightarrow \hat{\mathbf{D}}^\dagger(\alpha)\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{D}}(\alpha) = \hat{\mathbf{a}}^\dagger + \alpha^* \quad (2.115)$$

$$\hat{\mathbf{X}} \rightarrow \hat{\mathbf{D}}^\dagger(\alpha)\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{D}}(\alpha) = \hat{\mathbf{X}} + \langle\hat{\mathbf{X}}\rangle_\alpha, \quad (2.116)$$

$$\hat{\mathbf{Y}} \rightarrow \hat{\mathbf{D}}^\dagger(\alpha)\hat{\mathbf{Y}}\hat{\mathbf{D}}(\alpha) = \hat{\mathbf{Y}} + \langle\hat{\mathbf{Y}}\rangle_\alpha. \quad (2.117)$$

A koherens állapotok időfejlődését a következő módon határozhatjuk meg:

$$|\alpha(t)\rangle = \hat{\mathbf{U}}(t)|\alpha\rangle = e^{-i\omega(\hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{2})t}|\alpha\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} \cdot e^{-\frac{i\omega t}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \underbrace{e^{-i\omega\hat{\mathbf{n}}t}|n\rangle}_{=e^{-in\omega t}|n\rangle} = e^{-\frac{i\omega t}{2}}|\alpha e^{-i\omega t}\rangle. \quad (2.118)$$

Tehát elmondható, hogy a koherens állapotok komplex amplitúdója a fenti összefüggés alapján az időben $\alpha(t) = |\alpha| \cdot \exp[i(\phi - \omega t)]$ szerint változik.

Koherens állapotok valószínűségi eloszlása ún. Gauss-eloszlás, amely azt jelenti, hogy a klasszikus Gauss-nyaláb kvantumoptikai megfelelője. Ennek bizonyításához meg kell határozni a koherens állapot hullámfüggvényét helykoordináta-reprezentációban:

$$\langle x|\hat{\mathbf{a}}|\alpha, t\rangle = \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}x + \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\frac{d}{dx}\right)\psi_\alpha(x, t) = \alpha(t)\psi_\alpha(x, t)e^{-\frac{i\omega t}{2}}, \quad (2.119)$$

átrendezve a megfelelő módon:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_\alpha(x, t)}{dx} &= \left(\sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}\alpha(t) - \frac{\omega}{\hbar}x\right)\psi_\alpha(x, t) \cdot e^{-\frac{i\omega t}{2}} \rightarrow \\ &\rightarrow \psi_\alpha(x, t) = A \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}\alpha(t)x - \frac{\omega}{2\hbar}x^2 - \frac{i\omega t}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.120)$$

Az A konstans a normálási feltételből határozhatjuk meg:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{\alpha}(x, t)|^2 dx = A^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi\hbar}{\omega}} \exp\left[\frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*)^2\right] = 1 \rightarrow A = \sqrt[4]{\frac{\omega}{\pi\hbar}} \exp[-\text{Re}(\alpha(t))^2], \quad (2.121)$$

ahol felhasználtuk az alábbi Gauss-integrált:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ax - bx^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp\left(\frac{a^2}{4b}\right), \quad (2.122)$$

valamint $\alpha = \text{Re}(\alpha) + i\text{Im}(\alpha)$, amelyből a $\text{Re}(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*)$. Tehát a koherens állapot hullámfüggvényét

$$\psi_{\alpha}(x, t) = \sqrt[4]{\frac{\omega}{\pi\hbar}} \exp\left(-\text{Re}(\alpha(t))^2 + \sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}\alpha(t)x - \frac{\omega}{2\hbar}x^2 - \frac{i\omega t}{2}\right) \quad (2.123)$$

alakban írhatjuk fel, melynek ismeretében a valószínűségi eloszlása:

$$\begin{aligned} |\psi_{\alpha}(x, t)|^2 &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} \exp\left(-2\text{Re}(\alpha(t))^2 + \sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}\text{Re}(\alpha(t))x - \frac{\omega}{\hbar}x^2\right) = \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{\omega}{\hbar}\left(x - \langle x \rangle_{\alpha, t}\right)^2\right), \end{aligned} \quad (2.124)$$

amely Gauss-eloszlást követ, ahol

$$\langle x \rangle_{\alpha, t} = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} \text{Re}(\alpha(t)) = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} |\alpha| \cos(\omega t - \phi). \quad (2.125)$$

A komplex sík a klasszikus x helykoordináta és a p impulzus által kifeszített fázistér kvantumelméleti megfelelője. A harmonikus oszcillátor mozgásának megfelelő koherens állapot ω szögsebességgel „forog” a fázistérben, a bizonytalansági kör középpontja bejárja a klasszikus trajektóriát, amely az azonos mérték miatt kör. Az \hat{X} és az \hat{Y} kvadratúra operátor a sugárzási teret leíró oszcillátor esetében nem hely és impulzus jellegű mennyiségek, hanem az elektromos és mágneses terek oszcillációját írják le.

Mivel a lézer koherens állapotú fényt bocsát ki, ezért klasszikus fénynek tekintjük. A fénynek végtelen sok kvantumállapota létezik, amely megváltozik, ha optikai folyamatban vesz részt. Például detektáláskor, mivel a fotonok abszorbeálódnak a térből. Ilyenkor a tiszta kvantumállapotú fény kevertté válik, mert csillapodási folyamatban vesz részt. Ennek az alapesete egy részlegesen áteresztő tükrön való áthaladás. A klasszikus fény mellett léteznek nemklasszikus fényállapotok, melynek viselkedését nem érthetjük meg klasszikus tárgyalásban (nincs klasszikus megfelelője), ezért csak kvantumosan tudjuk értelmezni. A következőkben a nemklasszikus fényállapotokat fogjuk tárgyalni.

2.3.2. Összenyomott állapotok

Az optikai kommunikációs rendszerekben lézert használnak, amely ideális esetben koherens állapotú fény. Ekkor a mérhető jel-zaj viszony végső határát a koherens állapot kvantumzaja jelenti. Ez a határ az interferométerek felbontóképességénél is jelentkezik. Koherens állapotban az elektromos térerősség felbontásaként kapott kvadratúrák szórásai egyenlőek és minimálisak, de a Heisenberg-féle határozatlansági reláció megengedi, hogy az egyik mennyiség szórása tetszőlegesen csökkenjen a másik hátrányára. Az ilyen fény állapotát nemklasszikusnak hívjuk, amely szub-Poisson eloszlású és összenyomott. Összenyomott állapotokkal kapcsolatos kutatások már az 1970-es évek elején megindultak. Az ilyen típusú állapotok alkalmazhatósága az optikai kommunikációban, a mérés-technikában, valamint gravitációs hullámok detektálásában napjainkban is egy fontos kutatási téma.

Összenyomott állapotok olyan nemklasszikus fényállapotok, amelyeknek az egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy valamelyik mérhető fizikai mennyiségének kvantumzaja kisebb, mint koherens állapotban. Az összenyomást az alábbi unitér operátor segítségével írhatjuk le:

$$\hat{\mathbf{S}}(\zeta) = \exp\left(\frac{1}{2}\zeta^* \hat{\mathbf{a}}^2 - \frac{1}{2}\zeta(\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^2\right), \quad (2.126)$$

amelyet összenyomó (angolul squeezing) operátornak nevezünk, ahol $\zeta = r \cdot e^{i\theta}$ az összenyomási paraméter, ahol az r paraméter az összenyomás erősségét jelképezi ($0 \leq r < \infty$), a θ pedig a fázisszög ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Az összenyomó operátor a vákuumállapotot a $|0, \zeta\rangle$ összenyomott vákuumállapotba viszi át, az összenyomott vákuumállapotra hattatva a koherens eltolási operátort az $|\alpha, \zeta\rangle$ összenyomott koherens állapotot kapjuk eredményül:

$$|\alpha, \zeta\rangle = \hat{\mathbf{D}}(\alpha)|0, \zeta\rangle = \hat{\mathbf{D}}(\alpha)\hat{\mathbf{S}}(\zeta)|0\rangle, \quad (2.127)$$

Az összenyomó operátor a koherens eltolási operátornak a két-fotonos általánosításának is tekinthető, a vákuumállapotra hattatva ún. „két-fotonos koherens állapot”, más néven „összehúzó állapot” (angolul contractive state) generálható. Az összenyomó operátor a fotoneltüntető és a fotonkeltő operátort a következő módon transzformálja:

$$\hat{\mathbf{a}} \rightarrow \hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta)\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{S}}(\zeta) = \hat{\mathbf{a}} \cosh(r) - \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\theta} \sinh(r), \quad (2.128)$$

$$\hat{\mathbf{a}}^\dagger \rightarrow \hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta)\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{S}}(\zeta) = \hat{\mathbf{a}}^\dagger \cosh(r) - \hat{\mathbf{a}} e^{-i\theta} \sinh(r), \quad (2.129)$$

amely egy Bogoliubov-transzformációnak felel meg. Ennek bizonyításához felhasználtuk Baker-Hausdorff lemmát leíró (2.26) képletet, valamint a $\cosh(r)$ és $\sinh(r)$ Taylor-sorát:

$$\cosh(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (2.130)$$

Fontos megjegyeznünk, hogy ha a transzformáció során felcseréljük az $\hat{\mathbf{S}}(\zeta)$ és az $\hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta)$ operátorokat, akkor a transzformált fotoneltüntető és -keltő operátorokat

$$\hat{\mathbf{a}} \rightarrow \hat{\mathbf{S}}(\zeta)\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta) = \hat{\mathbf{a}} \cosh(r) + \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\theta} \sinh(r), \quad (2.131)$$

$$\hat{\mathbf{a}}^\dagger \rightarrow \hat{\mathbf{S}}(\zeta)\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta) = \hat{\mathbf{a}}^\dagger \cosh(r) + \hat{\mathbf{a}} e^{-i\theta} \sinh(r) \quad (2.132)$$

alakban írhatjuk fel. Ezek a transzformált összefüggések fontos szerepet fognak játszani a további számolásokban.

Mivel $\hat{\mathbf{D}}(\alpha)\hat{\mathbf{S}}(\zeta) \neq \hat{\mathbf{S}}(\zeta)\hat{\mathbf{D}}(\alpha)$, ennek a problémának a megoldására az alábbi összefüggést, valamint a (2.128) és (2.129) képletet alkalmazzuk, amellyel a sorrend felcserélhető:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}(\alpha)\hat{\mathbf{S}}(\zeta) &= \hat{\mathbf{S}}(\zeta)\hat{\mathbf{D}}(\beta) \rightarrow \hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta)\hat{\mathbf{D}}(\alpha)\hat{\mathbf{S}}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta) \frac{(\alpha\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \alpha^*\hat{\mathbf{a}})^n}{n!} \hat{\mathbf{S}}(\zeta) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n!} \hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta) \alpha^k (\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^k \underbrace{\hat{\mathbf{S}}(\zeta)\hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta)}_{=\hat{\mathbf{I}}} (-\alpha^*)^{n-k} \hat{\mathbf{a}}^{n-k} \hat{\mathbf{S}}(\zeta) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n!} \alpha^k \left(\hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta)\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{S}}(\zeta) \right)^k \cdot (-\alpha^*)^{n-k} \left(\hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta)\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{S}}(\zeta) \right)^{n-k} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\alpha\hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta)\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{S}}(\zeta) - \alpha^*\hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta)\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{S}}(\zeta) \right]^n = \quad (2.133) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\alpha\hat{\mathbf{a}}^\dagger \cosh(r) - \alpha\hat{\mathbf{a}} e^{-i\theta} \sinh(r) - \alpha^*\hat{\mathbf{a}} \cosh(r) + \alpha^*\hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\theta} \sinh(r) \right]^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\hat{\mathbf{a}}^\dagger \left(\alpha \cosh(r) + \alpha^* e^{i\theta} \sinh(r) \right) - \hat{\mathbf{a}} \left(\alpha^* \cosh(r) + \alpha e^{-i\theta} \sinh(r) \right) \right]^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \beta^*\hat{\mathbf{a}})^n}{n!} = e^{\beta\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \beta^*\hat{\mathbf{a}}} = \hat{\mathbf{D}}(\beta), \end{aligned}$$

ahol $\beta = \alpha \cosh(r) + \alpha^* e^{i\theta} \sinh(r)$. Tehát az összenyomott állapotokat általánosan a

$$\hat{\mathbf{D}}(\alpha)\hat{\mathbf{S}}(\zeta)|0\rangle = \hat{\mathbf{S}}(\zeta)\hat{\mathbf{D}}(\beta)|0\rangle \quad (2.134)$$

összefüggés szerint írhatjuk fel.

Az összenyomott állapotokra vonatkozó sajátérték-egyenlet meghatározásához induljunk ki a $\hat{\mathbf{a}}|0\rangle = 0$ kényszerfeltételből, majd a megfelelő operátorműveletekkel az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{D}}(\alpha)\hat{\mathbf{S}}(\zeta)\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta)\hat{\mathbf{D}}^\dagger(\alpha)\hat{\mathbf{D}}(\alpha)\hat{\mathbf{S}}(\zeta)|0\rangle = \\ & = \hat{\mathbf{D}}(\alpha)\left[\hat{\mathbf{a}}\cosh(r) + \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\theta}\sinh(r)\right]\hat{\mathbf{D}}^\dagger(\alpha)\hat{\mathbf{D}}(\alpha)\hat{\mathbf{S}}(\zeta)|0\rangle = \\ & = \left[(\hat{\mathbf{a}} - \alpha)\cosh(r) + (\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \alpha^*)e^{i\theta}\sinh(r)\right]\hat{\mathbf{D}}(\alpha)\hat{\mathbf{S}}(\zeta)|0\rangle = 0 \rightarrow \hat{\mathbf{b}}|\alpha, \zeta\rangle = \beta|\alpha, \zeta\rangle, \end{aligned} \quad (2.135)$$

ahol $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{a}}\cosh(r) + \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\theta}\sinh(r)$ és $\beta = \alpha\cosh(r) + \alpha^*e^{i\theta}\sinh(r)$. A (2.135) összefüggést fotonszámállapot-reprezentációban kifejtve egy általános rekurziós formulát kapunk:

$$\sqrt{m+1}\cosh(r) \cdot c_{m+1} + \sqrt{m}e^{i\theta}\sinh(r) \cdot c_{m-1} - \beta \cdot c_m = 0. \quad (2.136)$$

A $\beta = 0$ esetben az összenyomott vákuumállapot együtthatóját kapjuk eredményül:

$$c_{m+1} = -e^{i\theta}\tanh(r) \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{1}{2}} c_{m-1} \rightarrow c_m = -e^{i\theta}\tanh(r) \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} c_{m-2}. \quad (2.137)$$

Legyen a kiindulási pont c_0 , ez lesz a vákuumállapot súlya, ennek alapján pedig kiderül, hogy az összenyomott vákuumállapot páros fotonokból áll:

$$c_{2n} = \left(-e^{i\theta}\tanh(r)\right)^n \cdot \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\frac{1}{2}} c_0, \quad c_{2n+1} = 0, \quad (2.138)$$

ahol a dupla faktoriálisok felírhatók faktoriálisok segítségével:

$$(2n)!! = 2n \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot (2n-6) \dots 2 \equiv 2^n \cdot n!, \quad (2.139)$$

$$(2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot (2n-7) \dots 1 \equiv \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}. \quad (2.140)$$

A normálási feltételből a c_0 vákuumállapot súlyának értéke:

$$|c_0|^2 \cdot \underbrace{\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh^{2n}(r) \cdot (2n-1)!!}{(2n)!!}\right]}_{=\cosh(r)} = 1 \rightarrow c_0 = \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}}. \quad (2.141)$$

Ezek ismeretében az összenyomott vákuumállapot fotonszámállapot-reprezentációban és exponenciális alakban:

$$\begin{aligned} |0, \zeta\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} \left(-\frac{1}{2}e^{i\theta}\tanh(r)\right)^n |2n\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}e^{i\theta}\tanh(r) \cdot (\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^2\right) |0\rangle, \end{aligned} \quad (2.142)$$

ahol alkalmaztuk az exponenciális függvény Taylor-sorbeli definícióját. A $\beta \neq 0$ esetben az összenyomott koherens állapot együtthatóját kapjuk a következő módon:

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} \left(e^{i\theta} \tanh(r) \right)^{\frac{m}{2}} a_m, \quad (2.143)$$

A c_m együtthatót behelyettesítve a (2.136) rekurziós formulába a következő összefüggést kapjuk:

$$a_{m+1} + 2ma_{n-1} - 2\beta \left[e^{i\theta} \sinh(2r) \right]^{-\frac{1}{2}} a_m = 0. \quad (2.144)$$

Ha felhasználjuk az alábbi ún. Hermite-féle rekurziós relációt:

$$H_{m+1}(x) + 2mH_{m-1}(x) - 2xH_m(x) = 0, \quad (2.145)$$

ahol H_n az n -ed rendű Hermite-polinom, akkor összehasonlítva (2.144) képletet a (2.145) képlettel azt kapjuk, hogy $x = \beta \left[e^{i\theta} \sinh(2r) \right]^{-\frac{1}{2}}$ és $a_m = H_m(x)$. Ahhoz, hogy a normálást elvégezzük, szükség van a c_0 vákuum együtthatójára, mivel normált állapotoknál a c_0 tartalmazza a normát:

$$\begin{aligned} c_0 &= \langle 0 | \alpha, \zeta \rangle = \langle 0 | \hat{\mathbf{D}}(\alpha) \hat{\mathbf{S}}(\zeta) | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\mathbf{D}}^\dagger(-\alpha) \hat{\mathbf{S}}(\zeta) | 0 \rangle = \langle -\alpha | \zeta \rangle = \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^*)^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} c_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}(\alpha^*)^2 e^{i\theta} \tanh(r)\right), \end{aligned} \quad (2.146)$$

ennek ismeretében az összenyomott koherens állapot fotonszámállapot-reprezentációban, valamint exponenciális alakban:

$$\begin{aligned} |\alpha, \zeta\rangle &= \frac{e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}(\alpha^*)^2 e^{i\theta} \tanh(r)}}{\sqrt{\cosh(r)}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}e^{i\theta} \tanh(r)\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}} H_n\left(\beta \cdot \left[e^{i\theta} \sinh(2r)\right]^{-\frac{1}{2}}\right) |n\rangle = \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}(\alpha^*)^2 e^{i\theta} \tanh(r)}}{\sqrt{\cosh(r)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}e^{i\theta} \tanh(r) \cdot (\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^2 + \frac{1}{\cosh(r)} \beta \hat{\mathbf{a}}^\dagger\right) |0\rangle, \end{aligned} \quad (2.147)$$

ahol alkalmaztuk az alábbi azonosságot:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = \exp(-t^2 + 2tx). \quad (2.148)$$

Az $\alpha = 0$ esetben az összenyomott koherens állapotot leíró (2.147) képlet az összenyomott vákuumállapotot leíró (2.142) képletre redukálódik:

$$\begin{aligned}
|\alpha = 0, \zeta\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}e^{i\theta} \tanh(r)\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}} H_n(0) |n\rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}e^{i\theta} \tanh(r)\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}} (-2)^{\frac{n}{2}} (n-1)!! |n\rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-e^{i\theta} \tanh(r)\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}} (n-1)!! |n\rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-e^{i\theta} \tanh(r)\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}} (n-1)!! \sum_{m=0}^{\infty} |2m\rangle \underbrace{\langle 2m | n \rangle}_{=\delta_{2m,n}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2m)!}}{m!} \left(-\frac{1}{2}e^{i\theta} \tanh(r)\right)^m |2m\rangle,
\end{aligned} \tag{2.149}$$

ahol $H_n(0) = (-2)^{\frac{n}{2}} \cdot (n-1)!!$, valamint alkalmaztuk a dupla faktoriálisokra vonatkozó (2.140) képletet. Az $\zeta = 0$, akkor $r = 0$, így $\beta = \alpha$ esetben az összenyomott koherens állapotból koherens állapot lesz:

$$|\alpha, \zeta = 0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \cdot e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = |\alpha\rangle. \tag{2.150}$$

Ádám Péter, Janszky József és Andrey Vinogradov fizikusok munkásságai alapján az összenyomott koherens állapotokat koherens állapotok folytonos szuperpozíciójaként is definiálhatjuk a fázistér valós egyenesé mentén:

$$|\alpha, \zeta\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int g(x) |\alpha + \gamma x\rangle dx, \tag{2.151}$$

ahol $\gamma = \exp\left(i\frac{(\theta + \pi)}{2}\right)$, a $g(x)$ súlyfüggvény alakja pedig a következő:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(r)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\coth(r) - 1)x^2 + \left(\frac{\alpha\gamma^* - \alpha^*\gamma}{2}\right)x\right]. \tag{2.152}$$

Az összenyomott állapotú fény valójában két kimenő térmódus összegeként / különbségeként áll elő (lásd: spontán parametrikus lekonverzió), ezért fontos az összenyomott állapot kétmódusú általánosítása. A kétmódusú összenyomási operátort

$$\hat{\mathbf{S}}^{(2)}(\zeta) = \exp\left(\zeta^* \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}} - \zeta \hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{b}}^\dagger\right) \quad (2.153)$$

alakban írhatjuk fel, mely a kétmódusú vákuumállapotot egy kétmódusú tiszta állapotba viszi át:

$$|0,0,\zeta\rangle = \hat{\mathbf{S}}^{(2)}(\zeta)|0,0\rangle. \quad (2.154)$$

A kétmódusú összenyomott vákuumállapot a

$$\left(\cosh(r) \cdot \hat{\mathbf{a}} + e^{i\theta} \cdot \sinh(r) \cdot \hat{\mathbf{b}}^\dagger\right) |0,0,\zeta\rangle = 0 \quad (2.155)$$

sajátérték-egyenletet elégíti ki, melyet fotonszámállapot-reprezentációban kifejtve:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cosh(r) \cdot \hat{\mathbf{a}} + e^{i\theta} \sinh(r) \cdot \hat{\mathbf{b}}^\dagger\right) \cdot c_{n,n} |n,n\rangle = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} \cosh(r) \cdot c_{n,n} |n-1,n\rangle + \sqrt{n+1} e^{i\theta} \sinh(r) \cdot c_{n,n} |n,n+1\rangle = 0, \end{aligned} \quad (2.156)$$

mely átrendezve:

$$\begin{aligned} \sqrt{m+1} \cosh(r) \cdot c_{m+1,m} = -\sqrt{m} e^{i\theta} \sinh(r) \cdot c_{m,m-1} \rightarrow \\ \rightarrow c_{m,m} = -e^{i\theta} \tanh(r) \cdot c_{m-1,m-1}. \end{aligned} \quad (2.157)$$

Ismét kiindulási pontként kezeljük a $c_{0,0}$ vákuumállapot súlyát, így a kétmódusú összenyomott vákuumállapot együtthatója

$$c_{n,n} = \left(-e^{i\theta} \tanh(r)\right)^n \cdot c_{0,0} \quad (2.158)$$

szerint írható fel, ahol a $c_{0,0}$ vákuumállapot súlya a normából határozható meg:

$$|c_{0,0}|^2 \cdot \underbrace{\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tanh^{2n}(r)\right)}_{=1+\sinh^2(r)=\cosh^2(r)} = 1 \rightarrow c_{0,0} = \frac{1}{\cosh(r)}, \quad (2.159)$$

tehát a kétmódusú összenyomott vákuumállapot fotonszámállapot-reprezentációban:

$$|0,0,\zeta\rangle = \frac{1}{\cosh(r)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-e^{i\theta} \tanh(r)\right)^n |n,n\rangle. \quad (2.160)$$

Az egyes módusok azonban nem tiszta, hanem kevert állapotban vannak, melyet a sűrűségoperátorral írhatunk le:

$$\hat{\rho}_{a,b} = \frac{1}{\cosh^2(r)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{n+m} e^{i(n-m)\theta} \tanh^{n+m}(r) |n,n\rangle \langle m,m|. \quad (2.161)$$

Az egymódusú sűrűségoperátor meghatározásához a parciális trace művelete szükséges, így megkapjuk az ún. termális állapotokat:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{th}} &= \text{Tr}_a(\hat{\rho}_{a,b}) = \text{Tr}_b(\hat{\rho}_{a,b}) = (1 - \tanh^2(r)) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\tanh^2(r))^n |n\rangle \langle n| = \\ &= (1 - e^{-\nu}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\nu} |n\rangle \langle n| = (1 - e^{-\nu}) \cdot e^{-\nu \hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}}}, \end{aligned} \quad (2.162)$$

ahol $\nu = \nu(r) = -\ln(\tanh^2(r))$.

A kvadratúraoperátorok szórásait összenyomott koherens állapotban a következőképpen határozzuk meg. Szükség van az alábbi várható értékekre, felhasználva az összenyomó operátorral transzformált fotoneltüntető és -keltő operátorokat leíró a (2.128) és (2.129) összefüggéseket:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{a}} \rangle_{\alpha,\zeta} &= \langle \hat{\mathbf{a}}^\dagger \rangle_{\alpha,\zeta}^* = \langle \alpha, \zeta | \hat{\mathbf{a}} | \alpha, \zeta \rangle = \langle 0 | \hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta) \hat{\mathbf{D}}^\dagger(\alpha) \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{D}}(\alpha) \hat{\mathbf{S}}(\zeta) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta) (\hat{\mathbf{a}} + \alpha) \hat{\mathbf{S}}(\zeta) | 0 \rangle = \langle 0 | (\hat{\mathbf{a}} \cosh(r) - \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\theta} \sinh(r)) | 0 \rangle + \alpha = \alpha, \end{aligned} \quad (2.163)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{a}}^2 \rangle_{\alpha,\zeta} &= \langle (\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^2 \rangle_{\alpha,\zeta}^* = \langle 0 | \hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta) \hat{\mathbf{D}}^\dagger(\alpha) \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{D}}(\alpha) \hat{\mathbf{D}}^\dagger(\alpha) \hat{\mathbf{D}}^\dagger(\alpha) \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{D}}(\alpha) \hat{\mathbf{S}}(\zeta) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta) (\hat{\mathbf{a}} + \alpha)^2 \hat{\mathbf{S}}(\zeta) | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta) (\hat{\mathbf{a}}^2 + 2\alpha \hat{\mathbf{a}} + \alpha^2) \hat{\mathbf{S}}(\zeta) | 0 \rangle = \\ &= -e^{i\theta} \cosh(r) \sinh(r) + \alpha^2, \end{aligned} \quad (2.164)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}} \rangle_{\alpha,\zeta} &= \langle 0 | \hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta) \hat{\mathbf{D}}^\dagger(\alpha) \hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{D}}(\alpha) \hat{\mathbf{D}}^\dagger(\alpha) \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{D}}(\alpha) \hat{\mathbf{S}}(\zeta) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta) \left[(\hat{\mathbf{a}}^\dagger + \alpha^*) (\hat{\mathbf{a}} + \alpha) \right] \hat{\mathbf{S}}(\zeta) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta) \left[\hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}} + \alpha \hat{\mathbf{a}}^\dagger + \alpha^* \hat{\mathbf{a}} + |\alpha|^2 \right] \hat{\mathbf{S}}(\zeta) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | (\hat{\mathbf{a}}^\dagger \cosh(r) - \hat{\mathbf{a}} e^{-i\theta} \sinh(r)) (\hat{\mathbf{a}} \cosh(r) - \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\theta} \sinh(r)) | 0 \rangle + |\alpha|^2 = \\ &= \langle 0 | \left[\hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}} \cosh^2(r) - (\hat{\mathbf{a}}^2 e^{-i\theta} + (\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^2 e^{i\theta}) \cosh(r) \sinh(r) - \right. \\ &\quad \left. - \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}}^\dagger \sinh^2(r) \right] | 0 \rangle + |\alpha|^2 = \sinh^2(r) + |\alpha|^2, \end{aligned} \quad (2.165)$$

ahol felhasználtuk, hogy összenyomott vákuumállapotban a fotoneltüntető és fotonkeltő operátorok várható értékei $\langle \hat{\mathbf{a}} \rangle_{0,\zeta} = \langle \hat{\mathbf{a}}^\dagger \rangle_{0,\zeta} = 0$.

Ezek ismeretében a kvadratúraoperátorok szórásait összenyomott koherens állapotban a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{X}}_{\alpha,\zeta} &= \frac{1}{2} \left[-\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta} \right) \cosh(r) \sinh(r) + \alpha^2 + (\alpha^*)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sinh^2(r) + 2|\alpha|^2 + 1 - \alpha^2 - 2|\alpha|^2 - (\alpha^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[\cosh(2r) - \cos(\theta) \sinh(2r) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1 - \cos(\theta)}{2} e^{2r} + \frac{1 + \cos(\theta)}{2} e^{-2r} \right]^{\frac{1}{2}} = \end{aligned} \quad (2.166)$$

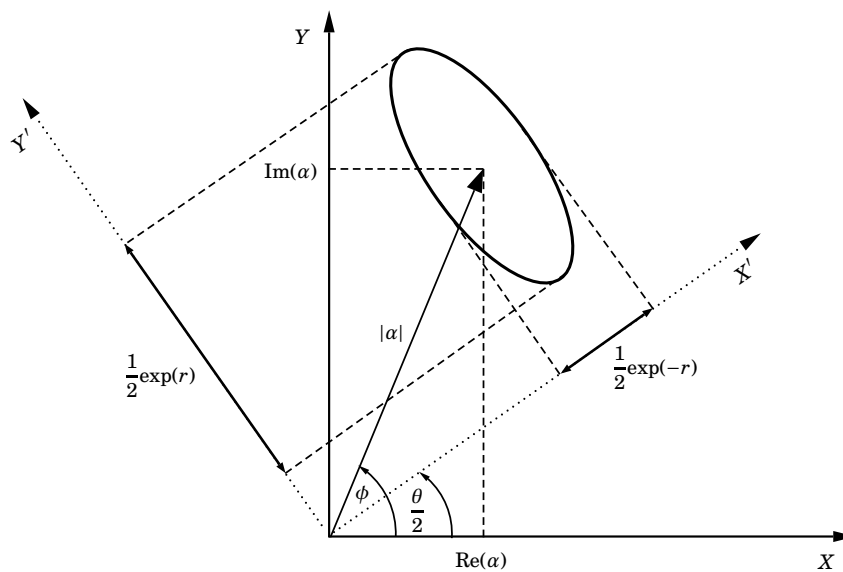
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{2r} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-2r} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \Delta \hat{\mathbf{Y}}_{\alpha,\zeta} &= \frac{1}{2} \left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-2r} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{2r} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.167)$$

ahol a $\theta = 0$ esetben kapunk minimális bizonytalanságot:

$$\Delta \hat{\mathbf{X}}'_{\alpha,\zeta} = \frac{1}{2} e^{-r}, \quad \Delta \hat{\mathbf{Y}}'_{\alpha,\zeta} = \frac{1}{2} e^r, \quad (2.168)$$

ahol tetszőleges összenyomási ($r > 0$) paraméterérték esetén az $\hat{\mathbf{X}}$ kvadratúraoperátor szórása kisebb lesz, mint $\frac{1}{2}$. Az $r = 0$ összenyomási paraméter esetén a $\Delta \hat{\mathbf{X}}_{\alpha,0} = \Delta \hat{\mathbf{Y}}_{\alpha,0} = \frac{1}{2}$ kvadratúraoperátor-szórásokat kapjuk, melyek koherens állapotban teljesülnek.

Az összenyomott koherens állapotot a fázistérben ábrázolva egy ellipszist kapunk, amelyet a 2.2. ábra szerint szemléltethetjük.



2.2. ábra. Összenyomott koherens állapot bizonytalansági képe a fázistérben.

Ezek alapján értelmezni tudjuk az összenyomott állapot elnevezést: a koherens állapot szimmetrikus, kör alakú bizonytalansági képét ellipszissé „nyomtuk össze”. Az ellipszis nagytengelye $\frac{1}{2}e^r$, kistengelye pedig $\frac{1}{2}e^{-r}$.

Az összenyomott koherens állapotok a kvantált elektromágneses sugárzási tér legáltalánosabb minimális bizonytalanságú állapotai, amelyek a szimmetrikus bizonytalanságú koherens állapotokat is magukba foglalják, hullámfüggvényeik pedig a harmonikus oszcillátor időfejlődése során nem folynak szét, azaz Schrödinger-képben

$$|\alpha(t), \zeta(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathbf{H}}t\right)|\alpha_0, \zeta_0\rangle = |\alpha| \cdot e^{i(\phi-\omega t)}, r \cdot e^{i(\theta-2\omega t)}\rangle \quad (2.169)$$

szerint írhatók fel.

2.3.3. Fotonszám- és speciális fotonszámállapotok

A fotonszámállapotok olyan nemklasszikus állapotok, amelyek a Fock-tér elemeit képzik, így ezt az állapotot szokás még Fock-állapotoknak is hívni, amelyet Vladimir Fock szovjet fizikus definiált. Speciális esetei az összenyomott fotonszám- és az eltolt összenyomott fotonszámállapotok:

$$|n, r, \theta, \alpha\rangle_{\text{DSn}} = \hat{\mathbf{D}}(\alpha)\hat{\mathbf{S}}(\zeta)|n\rangle, \quad (2.170)$$

A $r = 0$ esetben az eltolt fotonszámállapotot, $\alpha = 0$ esetben az összenyomott fotonszám-állapotot, az $\alpha = 0$ és $\zeta = 0$ esetben pedig a fotonszámállapotokat kapjuk eredményül. Az eltolt fotonszám- és összenyomott fotonszámállapotok fotonszámsorát egy összetett kifejezéssel kaphatjuk meg, de a bonyolultságuk miatt nem részletezzük a bizonyítását, csak az eredményeket közöljük:

$$\begin{aligned} |\alpha, m\rangle_{\text{Dn}} &= \frac{1}{\sqrt{m!}}\hat{\mathbf{D}}(\alpha)(\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^m|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}}\hat{\mathbf{D}}(\alpha)(\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^m\hat{\mathbf{D}}^\dagger(\alpha)\hat{\mathbf{D}}(\alpha)|0\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{m!}}(\hat{\mathbf{a}}^\dagger + \alpha^*)^m|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n!}{m!}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha^{m-n} \mathcal{L}_m^{m-n}(|\alpha|^2)|n\rangle, \end{aligned} \quad (2.171)$$

$$\begin{aligned} |r, \theta, m\rangle_{\text{Sn}} &= \left(\frac{1}{\cosh(r)}\right)^{m+\frac{1}{2}} \sqrt{m!} \cdot \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-\frac{1}{4}e^{-i\theta} \sinh(2r))^n}{n!(m-2n)!} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}e^{i\theta} \tanh(r))^k}{k!} \sqrt{(m-2n+2k)!} |m-2n+2k\rangle, \end{aligned} \quad (2.172)$$

ahol $\mathcal{L}_n^k(x)$ a Laguerre-polinom ún. Rodrigues-féle reprezentációban

$$\mathcal{L}_n^k(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(n+k)!}{(n-m)!(k+m)!n!} x^m. \quad (2.173)$$

A fotonszám- és speciális fotonszámállapotok szórásai a következők:

$$\Delta \hat{\mathbf{X}}_n = \Delta \hat{\mathbf{Y}}_n = \frac{1}{2}(2n+1)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.174)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{X}}_{Dn} = \Delta \hat{\mathbf{Y}}_{Dn} = \frac{1}{2}(2n+1)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.175)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{X}}_{Sn} = \frac{1}{2}(2n+1)^{\frac{1}{2}} e^{-r}, \quad \Delta \hat{\mathbf{Y}}_{Sn} = \frac{1}{2}(2n+1)^{\frac{1}{2}} e^r. \quad (2.176)$$

Mivel a fotonszám-operátor önadjungált, ezért a fotonszámállapotok teljes ortonormált rendszert alkotnak az oszcillátor Hilbert-térben. Nagy fotonszám esetén a fotonszám-állapot instabil lesz, mert a környezeti hatások, veszteségek miatt könnyen redukálódik klasszikus állapotra. A fotonszámállapotok előállíthatók többféleképpen, például unitér időfejlődéssel, és koherens állapotok szuperpozíciójaként, valamint nem unitér mérési folyamat segítségével.

2.3.4. Schrödinger-macska állapotok

A kvantummechanika egyik legfontosabb alapelve a lineáris szuperpozíció elve, melynek következménye a kvantuminterferencia jelensége, amely a szuperponált állapotot felépítő egyes állapotok, mint valószínűségi amplitúdók között lép fel, ha fizikailag mérhető mennyiséget származtatunk. A különböző állapotok között vett operátor-közéértékek az interferenciátagokat fogják jelenteni. Különösen érdekesek azok a szuperpozíciók, amelyek a makroszkopikusan megkülönböztethető, kváziklasszikus állapotok között jön létre. Ilyen állapotok fordulnak elő Schrödinger híres macskaparadoxonában, ezért nevezzük ezeket az állapotokat Schrödinger-macska állapotoknak, amelyeket úgy definiálhatunk, mint koherens állapotok szuperpozíciója az α sík valós egyenese mentén:

$$|\alpha, \pm\rangle_{SM} = \frac{1}{\sqrt{2(1 \pm e^{-2\alpha^2})}} (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle), \quad (2.177)$$

ahol $|\alpha, +\rangle_{SM}$ a páros, $|\alpha, -\rangle_{SM}$ pedig a páratlan Schrödinger-macska állapotokat jelöli. A $|-\alpha\rangle$ állapot a koherens állapot ellentétes fázisú állapotát jelöli:

$$\hat{\mathbf{R}}(\vartheta = \pi)|\alpha\rangle = (-1)^{\hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}}} |\alpha\rangle = |-\alpha\rangle, \quad (2.178)$$

Janszky József és Andrey Vinogradov magyar és orosz fizikus munkássága alapján a páros Schrödinger-macska állapotokkal az összenyomott vákuumállapotok definiálhatók úgy, mint folytonos Gauss-súlyfüggvénnyel vett szuperpozíciója:

$$|0, \gamma\rangle = \frac{\sqrt[4]{1+\gamma^2}}{\sqrt{\pi}\gamma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 x^2} |x\rangle dx, \quad (2.179)$$

ahol $\gamma = e^{2r} - 1$ az összenyomás erősségét jellemző paraméter, x jelöli a koherens állapot komplex amplitúdóját. Ebben az esetben a kvadratúraoperátorok szórásai a következőképpen alakulnak:

$$\Delta \hat{X}_{0,\gamma} = \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{2}, \quad \Delta \hat{Y}_{0,\gamma} = \frac{1}{2\sqrt{1+\gamma^2}}, \quad (2.180)$$

vagyis az X tengely mentén vett folytonos Gauss-szuperpozíció az \hat{Y} kvadratúra mennyiségben vezet a koherens értéknél kisebb szórásra.

Schrödinger-macska állapotok esetén a kvadratúraoperátorok szórásai a következők lesznek:

$$\Delta \hat{X}_{\alpha,\pm} = \Delta \hat{Y}_{\alpha,\pm} = \left[\frac{1}{4} \mp \frac{\alpha^2 e^{-2\alpha^2}}{1 \pm e^{-2\alpha^2}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.181)$$

ahol felhasználtuk a következő várható értékeket Schrödinger-macska állapotban:

$$\begin{aligned} \langle \hat{a} \rangle_{\alpha,\pm} &= \langle \hat{a}^\dagger \rangle_{\alpha,\pm}^* = \langle \alpha, \pm | \hat{a} | \alpha, \pm \rangle = \frac{1}{2(1 \pm e^{-2\alpha^2})} (\langle \alpha | \pm \langle -\alpha | \hat{a} (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle) = \\ &= \frac{1}{2(1 \pm e^{-2\alpha^2})} (\langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle \pm \langle \alpha | \hat{a} | -\alpha \rangle \pm \langle -\alpha | \hat{a} | \alpha \rangle \pm \langle -\alpha | \hat{a} | -\alpha \rangle) = \\ &= \frac{1}{2(1 \pm e^{-2\alpha^2})} (2\alpha \pm 2e^{-2\alpha^2}) = \alpha, \end{aligned} \quad (2.182)$$

$$\langle \hat{a}^2 \rangle_{\alpha,\pm} = \langle (\hat{a}^\dagger)^2 \rangle_{\alpha,\pm}^* = \langle \hat{a} \rangle_{\alpha,\pm}^2 = \left(\langle \hat{a}^\dagger \rangle_{\alpha,\pm}^* \right)^2 = \alpha^2, \quad (2.183)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_{\alpha,\pm} &= \langle \alpha, \pm | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha, \pm \rangle = \frac{1}{2(1 \pm e^{-2\alpha^2})} (\langle \alpha | \pm \langle -\alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle) = \\ &= \frac{1}{2(1 \pm e^{-2\alpha^2})} (\langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle \pm \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | -\alpha \rangle \pm \\ &\quad \pm \langle -\alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle \pm \langle -\alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | -\alpha \rangle) = \frac{\alpha^2 (1 \mp e^{-2\alpha^2})}{1 \pm e^{-2\alpha^2}}, \end{aligned} \quad (2.184)$$

ahol $\langle \alpha | -\alpha \rangle = \langle -\alpha | \alpha \rangle = \exp(-2\alpha^2)$, valamint $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.3.5. Amplitúdó-összenyomott állapotok

A koherens állapotoknál említettük, hogy azokat az állapotokat nevezzük amplitúdó-összenyomott állapotoknak, amelyeknél $(\Delta \hat{n})^2 < \langle \hat{n} \rangle$, amely azt jelenti a fotonszám szórásnégyzete kisebb, mint koherens állapotban. Speciális esetei a Pegg-Barnett fotonszám-fázis határozatlansági összefüggés intelligens állapotai, melyek egy körön vett koherens állapotok Gauss-szuperpozíciójaként definiálhatók:

$$|\alpha_0, u, \delta\rangle_{AS} = c \int \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\phi^2 - i\delta\phi\right) |\alpha_0 e^{i\phi}\rangle d\phi, \quad (2.185)$$

ahol α_0 a koherens amplitúdó, c a normálási együttható, az u paraméter határozza meg az eloszlás szélességét, a δ egy modulációs konstans, amely illesztett esetben $\delta^2 = \alpha_0$. Az amplitúdó-összenyomott állapotok kifejezhetők fotonszámállapot-reprezentációban a következő módon:

$$|\alpha_0, u, \delta\rangle_{AS} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \alpha_0, u, \delta \rangle |n\rangle, \quad (2.186)$$

ahol

$$\begin{aligned} \langle n | \alpha_0, u, \delta \rangle &= c \int \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\phi^2 - i\delta\phi\right) \langle n | \alpha_0 e^{i\phi} \rangle d\phi = \\ &= c \cdot e^{-\frac{|\alpha_0|^2}{2}} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} \int \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\phi^2 - i(\delta - n)\phi\right) d\phi = \\ &= c \cdot e^{-\frac{|\alpha_0|^2}{2}} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} \frac{\sqrt{2\pi}}{u} \exp\left(-\frac{(\delta - n)^2}{2u^2}\right) \end{aligned} \quad (2.187)$$

Az integrálás elvégzéséhez az alábbi Gauss-integrált használtuk fel:

$$\int \exp(-ax^2 \pm ibx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right). \quad (2.188)$$

A c normálási együtthatót a következőképpen határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_0, u, \delta | \alpha_0, u, \delta \rangle &= c^2 \cdot e^{-|\alpha_0|^2} \cdot \frac{2\pi}{u^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\alpha_0|^{2m}}{m!} \exp\left(-\frac{(\delta - u)^2}{u^2}\right) = 1 \rightarrow \\ &\rightarrow c = e^{\frac{|\alpha_0|^2}{2}} \cdot \frac{u}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\alpha_0|^{2m}}{m!} \exp\left(-\frac{(\delta - m)^2}{u^2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.189)$$

Tehát az amplitúdó-összenyomott állapotok fotonszámállapot-reprezentációban:

$$|\alpha_0, u, \delta\rangle_{\text{AS}} = c' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} \exp\left[-\frac{(\delta-n)^2}{2u^2}\right] |n\rangle, \quad (2.190)$$

ahol

$$c' = \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\alpha_0|^{2m}}{m!} \exp\left(-\frac{(\delta-m)^2}{u^2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.191)$$

Az amplitúdó-összenyomott állapotból $|\alpha_0\rangle$ koherens állapot lesz az $u \rightarrow \infty$ esetben, az $u \ll 1$ esetben pedig $|n = \delta\rangle$ fotonszámállapottá redukálódik, ahol $\delta = \sqrt{\alpha_0}$. A (2.185) képletben definiált amplitúdó-összenyomott állapotok bizonyos paramétertartományokon az ún. fotonszám-operátor–fotoneltüntető operátor határozatlansági összefüggés intelligens állapotai is.

2.3.6. Nevezetes fotonszámállapot-szuperpozíciók

Nevezetes fotonszámállapot-szuperpozíciók közé tartoznak a binomiális állapotok, amelyeket a következőképp definiálhatjuk:

$$|p, M\rangle_{\text{B}} = \sum_{n=0}^M \left[\binom{M}{n} p^n \cdot (1-p)^{M-n} \right]^{\frac{1}{2}} |n\rangle, \quad (2.192)$$

ahol az együtthatói úgy vannak megválasztva, hogy az n -fotonos eloszlása binomiális eloszlást követ:

$$P(n, p, M) = |\langle n | p, M \rangle_{\text{B}}|^2 = \binom{M}{n} p^n \cdot (1-p)^{M-n}, \quad (2.193)$$

ahol $0 \leq p \leq 1$, és M egy tetszőleges egész szám ($M \geq n$). A binomiális állapotok normáltak, mivel

$$\langle p, M | p, M \rangle_{\text{B}} = \sum_{n=0}^M \binom{M}{n} p^n \cdot (1-p)^{M-n} = (p + 1 - p)^M = 1. \quad (2.194)$$

Ha M véges értékű és $p = 0$, akkor a binomiális állapotból $|0\rangle$ vákuumállapot lesz, a $p = 1$ értéknél pedig $|n = M\rangle_n$ fotonszámállapotra redukálódik. A binomiális állapotból $|\alpha = \sqrt{pM}\rangle$ koherens állapot lesz, ha $p \rightarrow 0$, $M \rightarrow \infty$. A binomiális állapotok speciális esete az ún. általánosított és kevert Bernoulli-állapotok ($M = 1$):

$$|p, M = 1\rangle_{\text{B}} = \sqrt{1-p}|0\rangle + \sqrt{p}|1\rangle, \quad (2.195)$$

amely a vákuum- és az egyfotonállapot tetszőleges szuperpozíciója. Binomiális állapotban $(\Delta \hat{\mathbf{n}}_B)^2 < \langle \hat{\mathbf{n}} \rangle_B$, azaz

$$\langle \hat{\mathbf{n}} \rangle_B = \sum_{n=0}^M n \binom{M}{n} \left(\frac{p}{1-p} \right)^n (1-p)^M = pM, \quad (2.196)$$

$$(\Delta \hat{\mathbf{n}}_B)^2 = p(1-p)M, \quad (2.197)$$

ezért a binomiális állapotok szub-Poisson eloszlásúak, bizonyos paraméter tartományokon pedig összenyomott tulajdonságot mutat. Könnyen belátható, hogy $p \rightarrow 0$ esetben a koherens állapotbeli n -fotonos eloszlást kapjuk, azaz $(\Delta \hat{\mathbf{n}}_B)^2 = \langle \hat{\mathbf{n}} \rangle_B = pM \equiv |\alpha|^2$, ahol $\alpha = \sqrt{pM}$. Binomiális állapotban a kvadratúraoperátorok szórásait a következőképpen írhatjuk fel:

$$\Delta \hat{\mathbf{X}}_B = \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}pM + \frac{1}{2}(p^2M(M-1))^{\frac{1}{2}} \langle p, M | p, M-2 \rangle - pM \langle p, M | p, M-1 \rangle^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.198)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{Y}}_B = \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}pM - \frac{1}{2}(p^2M(M-1))^{\frac{1}{2}} \langle p, M | p, M-2 \rangle \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.199)$$

ahol a $\langle p, M | p, M-1 \rangle$ és $\langle p, M | p, M-2 \rangle$ mátrixelemekkel határozható meg az összenyomottsági tulajdonság. A kvadratúraoperátor-szórások meghatározásához a

$$\langle \hat{\mathbf{a}}^n \rangle_B = \langle (\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^n \rangle_B = \left[\frac{p^n M!}{(M-n)!} \right]^{\frac{1}{2}} \langle p, M | p, M-n \rangle \quad (2.200)$$

összefüggést alkalmaztuk. A $p = 0$, valamint a $p \rightarrow 0$ esetekben egyenlőségként teljesül a Heisenberg-féle határozatlansági reláció.

A negatív binomiális állapotok egyik fajtája azok a szuper-Poisson eloszlású állapotok, amelyek kapcsolatot teremtenek a koherens és az ún. Susskind-Glogower fázis állapotok között:

$$|\eta, M, \varphi\rangle_{\text{NB}} = (1-\eta^2)^{\frac{M}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(M+n)}{\Gamma(M) \cdot n!} \right]^{\frac{1}{2}} (\eta e^{i\varphi})^n |n\rangle, \quad (2.201)$$

ahol a n -fotonos eloszlás a negatív binomiális eloszlást követi:

$$P(n, \eta, M) = |\langle n | \eta, M, \varphi \rangle_{\text{NB}}|^2 = \frac{\Gamma(M+n)}{\Gamma(M) \cdot n!} \eta^{2n} \cdot (1-\eta^2)^M, \quad (2.202)$$

ahol az η valószínűségek kielégítik a $0 < \eta^2 < 1$ feltételt. A negatív binomiális állapotból vákuumállapot lesz az $\eta \rightarrow 0$ esetben, az $\eta \rightarrow 0$ és $M \rightarrow \infty$ esetben $|\alpha = \eta\sqrt{M}\rangle$ koherens

állapottá redukálódik. A negatív binomiális állapotok normáltak, mivel

$$\langle \eta, M, \varphi | \eta, M, \varphi \rangle_{\text{NB}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(M+n)}{\Gamma(M) \cdot n!} \eta^{2n} \cdot (1-\eta^2)^M = 1. \quad (2.203)$$

Az $M = 1$ esetben a negatív binomiális állapot

$$|\eta, M = 1, \varphi\rangle_{\text{NB}} = \sqrt{1-\eta^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\eta e^{i\varphi})^n |n\rangle \quad (2.204)$$

alakú lesz, amit geometrikus állapotnak is szokás nevezni, mely a Susskind-Glogower-féle fázisoperátor sajátállapotának felel meg. A negatív binomiális állapotok egy másik fajtája kapcsolatot teremt a termális és a koherens állapotok között:

$$|p, w\rangle_{\text{NB}} = p^{\frac{w+1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{n+w}{n} (1-p)^n \right]^{\frac{1}{2}} |n\rangle, \quad (2.205)$$

ahol w tetszőleges pozitív egész szám ($w \geq n$). Az irodalomban ezeken az állapotokon kívül még számos speciális fotonszámállapot-szuperpozíciókat találhatunk meg. Ezek például a forrás-, multinomiális, reciprok binomiális, hipergeometrikus és negatív hipergeometrikus, tangens és kotangens, valamint a Hermite-polinom állapotok.

3. fejezet

Kvázivalószínűség- eloszlásfüggvények

A kvantumállapotokat kvázivalószínűség-eloszlásfüggvényekkel reprezentálhatjuk a fázistéren. Ilyen eloszlások például a Glauber-Sudarshan P -reprezentáció, a Husimi Q -reprezentáció, valamint a Wigner-féle kvázivalószínűség-eloszlásfüggvények. A P - és Q -reprezentáció között az a különbség, hogy az előbbi normál rendezett, az utóbbi anti-normál rendezett korrelációs függvények kiértékelésére alkalmas.

A Glauber-Sudarshan P -reprezentációt az alábbi definíció írja le koherens-bázisban:

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha, \quad (3.1)$$

ahol $\hat{\rho}$ egy adott kvantumállapot sűrűségoperátora, $P(\alpha)$ a fázistér sűrűségét, más néven a súlyfüggvényét jelképezi. A $P(\alpha)$ függvény meghatározásához a következő módszert alkalmazzuk. Szorozzuk be a sűrűségoperátort balról $|-u\rangle$, jobbról pedig az $|u\rangle$ koherens állapottal:

$$\langle -u | \hat{\rho} | u \rangle = \int P(\alpha) \langle -u | \alpha \rangle \langle \alpha | u \rangle d^2\alpha = e^{-|u|^2} \cdot \int P(\alpha) e^{-|\alpha|^2} \cdot e^{u\alpha^* - u^*\alpha} d^2\alpha, \quad (3.2)$$

amelyből $\langle -u | \hat{\rho} | u \rangle e^{|u|^2}$ kifejezhető úgy, mint $P(\alpha) e^{-|\alpha|^2}$ Fourier-transzformáltja. Vegyük ennek az inverz Fourier-transzformáltját, melynek segítségével kifejezhetjük a kérdéses $P(\alpha)$ függvényt:

$$P(\alpha, \alpha^*) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi^2} \cdot \int e^{|u|^2} \langle -u | \hat{\rho} | u \rangle \cdot e^{u^*\alpha - u\alpha^*} d^2u, \quad (3.3)$$

Koherens állapotok esetén a sűrűségoperátor: $\hat{\rho} = |\beta\rangle\langle\beta|$, így

$$P_{|\beta\rangle}(\alpha) = \frac{e^{|\alpha|^2 - |\beta|^2}}{\pi^2} \cdot \int \exp[u^*(\alpha - \beta) - u(\alpha^* - \beta^*)] d^2u = e^{|\alpha|^2 - |\beta|^2} \cdot \delta^{(2)}(\alpha - \beta), \quad (3.4)$$

ahol $\delta^{(2)}(\alpha - \beta)$ az ún. két dimenziós Dirac-delta:

$$\delta^{(2)}(\alpha - \beta) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \int \exp[-\beta(\alpha^* - \beta^*)] \cdot \exp[\beta^*(\alpha - \beta)] d^2\beta, \quad (3.5)$$

amely a fentiek alapján a koherens állapot P -reprezentációja. Ennek alapján a $P(\alpha, \alpha^*)$ felírható úgy, mint

$$P(\alpha) = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \delta(\alpha^* - \hat{\mathbf{a}}^\dagger) \delta(\alpha - \hat{\mathbf{a}}) \right]. \quad (3.6)$$

Fotonszámmállapotok esetén a $P(\alpha, \alpha^*)$ függvény a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} P_{|n\rangle}(\alpha, \alpha^*) &= \frac{|\alpha|^2}{\pi^2} \frac{1}{n!} \cdot \int (-|u|^2)^n \cdot \exp(u^* \alpha - u \alpha^*) d^2u = \\ &= \frac{|\alpha|^2}{\pi^2} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{2n}}{\partial(\alpha^*)^n \partial \alpha^n} \cdot \int \exp(u^* \alpha - u \alpha^*) d^2u = \frac{|\alpha|^2}{n!} \frac{\partial^{2n}}{\partial(\alpha^*)^n \partial \alpha^n} \delta^{(2)}(\alpha). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Mivel $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$, így a $P(\alpha, \alpha^*)$ normált, azaz

$$\int P(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha = 1. \quad (3.8)$$

Az egyik leggyakrabban használt eloszlásfüggvények a Wigner-féle kvázivalószínűség-eloszlásfüggvények, amely koherens-bázisban az alábbi definíció írja le:

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \int \exp(\alpha \eta^* - \alpha^* \eta) \cdot \text{Tr}[\hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{D}}(\eta)] d^2\eta, \quad (3.9)$$

amely korlátos függvény, mivel létezik alsó és felső határa:

$$-\frac{2}{\pi} \leq W(\alpha) \leq \frac{2}{\pi}, \quad (3.10)$$

Példaként a koherens állapotok Wigner-függvényét

$$\begin{aligned} W_{|\beta\rangle}(\alpha) &= \frac{1}{\pi^2} \cdot \int \exp(\alpha \eta^* - \alpha^* \eta) \cdot \text{Tr}[|\beta\rangle\langle\beta| \cdot \hat{\mathbf{D}}(\eta)] d^2\eta = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \cdot \int \exp[\eta(\beta^* - \alpha^*)] \cdot e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} \langle\beta| e^{\eta \hat{\mathbf{a}}^\dagger} e^{-\eta^* \hat{\mathbf{a}}} |\beta\rangle d^2\eta = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \cdot \int \exp[\eta(\beta^* - \alpha^*)] \cdot e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} \cdot e^{-\eta^* \beta} \langle\beta| e^{\eta \hat{\mathbf{a}}^\dagger} |\beta\rangle d^2\eta = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \cdot \int \exp[\eta(\beta^* - \alpha^*) - \eta^*(\beta - \alpha)] \cdot e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} d^2\eta = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2} - 2iwx\right) dx}_{=\sqrt{2\pi}e^{-2w^2}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2} + 2ivy\right) dy}_{=\sqrt{2\pi}e^{-2v^2}} = \frac{2}{\pi} e^{-2|\beta - \alpha|^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

alakban írhatjuk fel. Az egyszerűség kedvéért bevezettünk új változókat: $\eta = x + iy$, és $d^2\eta = d[\operatorname{Re}(\eta)] \cdot d[\operatorname{Im}(\eta)] = dx dy$, valamint $\beta - \alpha = v + iw$, így alkalmazhatjuk a Gauss-integrált meghatározó (2.188) képletet. További nemklasszikus állapotok, mint például a fotonszámállapotok, az összenyomott koherens állapotok, valamint az összenyomott fotonszámállapotok Wigner-függvényeit

$$W_{|n\rangle}(\alpha) = \frac{2}{\pi} (-1)^n e^{-|\alpha|^2} L_n(4|\alpha|^2), \quad (3.12)$$

$$W_{|\beta, \zeta\rangle}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \exp \left[-2 \left(\frac{(\alpha' - \beta')^2}{e^{-2r}} + \frac{(\alpha'' - \beta'')^2}{e^{2r}} \right) \right], \quad (3.13)$$

$$W_{|\zeta, n\rangle}(\alpha) = \frac{2}{\pi} (-1)^n e^{\frac{1}{2}(\alpha - \alpha^*)^2 e^{-2r} - \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*)^2 e^{2r}} L_n[(\alpha + \alpha^*)^2 e^{2r} - (\alpha - \alpha^*)^2 e^{-2r}] \quad (3.14)$$

alakban írhatjuk fel, ahol $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ és $\beta = \beta' + i\beta''$, és $L_n(x)$ az n -ed rendű Laguerre-polinom:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k. \quad (3.15)$$

A $P(\alpha)$ eloszlásfüggvényhez hasonlóan a $W(\alpha)$ Wigner-függvény is normált, azaz:

$$\int W(\alpha) d^2\alpha = 1. \quad (3.16)$$

Említsük meg még a $Q(\alpha)$ Husimi-féle kvázivalószínűség-eloszlásfüggvényeket, amelyeket a következő módon írhatjuk fel:

$$Q(\alpha) = \operatorname{Tr} \left[\hat{\rho} \delta(\alpha - \hat{\mathbf{a}}) \delta(\alpha^* - \hat{\mathbf{a}}^\dagger) \right]. \quad (3.17)$$

Felhasználva a koherens állapotok teljességét leíró (2.96) összefüggést a $Q(\alpha)$ eloszlásfüggvényt

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{Tr} \int \left[\hat{\rho} \delta(\alpha - \hat{\mathbf{a}}) \delta(\alpha^* - \hat{\mathbf{a}}^\dagger) |\beta\rangle \langle \beta| \right] d^2\beta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int \left[\langle \beta | \hat{\rho} | \beta \rangle \delta(\alpha - \beta) \delta(\alpha^* - \beta^*) \right] d^2\beta = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle \end{aligned} \quad (3.18)$$

alakban írhatjuk fel, mely alapján elmondható, hogy arányos lesz az adott fényállapot sűrűségoperátorának diagonális elemeivel koherens-bázisban. Ennek meghatározásához az alábbi integrált kell alkalmazni:

$$\int f(y) \delta(x - y) dy = f(x). \quad (3.19)$$

A $Q(\alpha)$ eloszlásfüggvény megadható a $P(\alpha)$ és a $W(\alpha)$ eloszlásfüggvényekkel is:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \cdot \int P(\beta) e^{-|\alpha-\beta|^2} d^2\beta = \frac{2}{\pi} \cdot \int W(\beta) e^{-2|\alpha-\beta|^2} d^2\beta. \quad (3.20)$$

A $Q(\alpha)$ eloszlásfüggvény normált, valamint korlátos, azaz

$$\int Q(\alpha) d^2\alpha = 1, \quad 0 \leq Q(\alpha) \leq \frac{1}{\pi}. \quad (3.21)$$

Példaként a koherens és a fotonszámállapotokat Q -reprezentációban

$$Q_{|\beta\rangle}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \cdot |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha-\beta|^2}, \quad (3.22)$$

$$Q_{|n\rangle}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \cdot |\langle \alpha | n \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{\pi \cdot n!} e^{-|\alpha|^2} \quad (3.23)$$

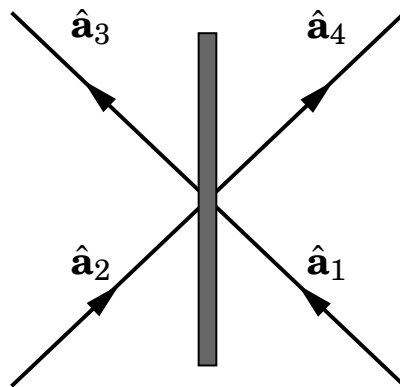
szerint írhatjuk fel.

4. fejezet

A kvantumoptika elemei

4.1. Nyalábosztó

A kvantumoptika egyik legfontosabb elemi eszköze a veszteségmentes nyalábosztó, amely egy passzív optikai elem, melynek sematikus vázlatát az 4.1. ábrán láthatjuk.



4.1. ábra. A veszteségmentes nyalábosztó sematikus vázlata.

A kvantumoptikában ez az elem sokkal többre képes, mint a klasszikus optikában megszoktuk egy nyalábosztótól. A nyalábosztónak két bemeneti és kimeneti fénymódusa van, a fénymódusokhoz rendelt fotoneltüntető operátorok közötti kapcsolatot a nyalábosztó transzformáció írja le:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_3 \\ \hat{\mathbf{a}}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{13} & r_{23} \\ r_{14} & t_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |t_{13}| \cdot e^{i\phi_{13}} & |r_{23}| \cdot e^{i\phi_{23}} \\ |r_{14}| \cdot e^{i\phi_{14}} & |t_{24}| \cdot e^{i\phi_{24}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

ahol t_{13} , t_{24} a nyalábosztó áteresztőképessége (transzmittanciája), r_{14} , r_{23} a visszaverődési együtthatója (reflektanciája). A nyalábosztó transzformációs mátrixa unitér azaz:

$$\begin{pmatrix} t_{13} & r_{23} \\ r_{14} & t_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{13}^* & r_{14}^* \\ r_{23}^* & t_{24}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

ahol felhasználtuk az $\hat{\mathbf{M}}_{ij}^\dagger = \hat{\mathbf{M}}_{ji}^*$ mátrixtulajdonságot, melyből a nyalábosztó általános feltételei a következőképp alakulnak:

$$|t_{13}|^2 + |r_{23}|^2 = |t_{24}|^2 + |r_{14}|^2 = 1, \quad (4.3)$$

$$r_{14}t_{13}^* + t_{24}r_{23}^* = r_{23}t_{24}^* + t_{13}r_{14}^* = 0. \quad (4.4)$$

A (4.4) összefüggés segítségével könnyen belátható, hogy a nyalábosztó fázisszögeire a

$$\phi_{14} - \phi_{24} + \phi_{23} - \phi_{13} = \pm\pi \quad (4.5)$$

általános feltétel érvényes, amely minden tetszőleges arányú nyalábosztóra teljesül. Ahhoz, hogy a (4.3) és (4.3) képlet két oldala megegyezzen, akkor meg kell követelni, hogy $|t_{13}| = |t_{24}| = |t|$ és $|r_{14}| = |r_{23}| = |r|$, ebben az esetben a nyalábosztó transzformáció:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_3 \\ \hat{\mathbf{a}}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |t| \cdot e^{i\phi_{13}} & |r| \cdot e^{i\phi_{23}} \\ |r| \cdot e^{i\phi_{14}} & |t| \cdot e^{i\phi_{24}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

és ebből adódóan a szimmetrikus nyalábosztó feltételei:

$$|r|^2 + |t|^2 = 1, \quad (4.7)$$

$$rt^* + r^*t = 0. \quad (4.8)$$

Azokban a speciális esetekben, amikor kocka vagy dielektrikum rétegű nyalábosztóról beszélünk, az alábbi fázisszögek érvényesek:

$$\text{Kocka nyalábosztó: } \phi_{13} = \phi_{14} = \phi_{23} = 0, \quad \phi_{24} = \pi, \quad (4.9)$$

$$\text{Dielektrikum rétegű nyalábosztó: } \phi_{13} = \phi_{24} = 0, \quad \phi_{14} = \phi_{23} = \frac{\pi}{2}. \quad (4.10)$$

A fénymódusok fotoneltüntető operátorainak kommutációs relációja miatt a nyalábosztó hatását általánosan egy SU(2) transzformációval is megadhatjuk:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_3 \\ \hat{\mathbf{a}}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{T} \cdot e^{i\phi_T} & \sqrt{R} \cdot e^{i\phi_R} \\ -\sqrt{R} \cdot e^{-i\phi_R} & \sqrt{T} \cdot e^{-i\phi_T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

ahol T a nyalábosztó áteresztőképessége, R a visszaverődési együtthatója, melyek a $T + R = 1$ feltételt elégítik ki. Kísérletileg minden SU(2) transzformáció megvalósítható nyalábosztóval, és egy adott nyalábosztó esetén a ϕ_T , ϕ_R fázisparamétereket a nyalábosztó elé és után tett fázistolókkal állíthatjuk be. Szimmetrikus nyalábosztó esetében a $T = R = \frac{1}{2}$ beállítást kell alkalmazni.

Chung Ki Hong és Zhe Yu Ou koreai fizikusok és Leonard Mandel német fizikus által definiált nyalábosztó transzformáció a következő:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_3 \\ \hat{\mathbf{a}}_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

Fizikailag ez nyalábosztó transzformáció azt jelenti, hogy az egyik felületről való visszaverődés egy π relatív fázistolást idéz elő, amely a -1 szorzótényezőnek felel meg. Az ő nevükhöz fűződik a kétfotonos interferencia kísérleti demonstrálása (Hong-Ou-Mandel effektus).

A nyalábosztó transzformáció koherens-reprezentációban a következőképpen írható fel fázistolásos nyalábosztók esetében:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle_1 \otimes |\beta\rangle_2 &\rightarrow \exp \left[\alpha \left(\sqrt{T} \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger + i\sqrt{1-T} \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger \right) - \alpha^* \left(\sqrt{T} \hat{\mathbf{a}}_3 - i\sqrt{1-T} \hat{\mathbf{a}}_4 \right) \right] \times \\ &\times \exp \left[\beta \left(i\sqrt{1-T} \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger + \sqrt{T} \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger \right) - \beta^* \left(-i\sqrt{1-T} \hat{\mathbf{a}}_3 + \sqrt{T} \hat{\mathbf{a}}_4 \right) \right] |0\rangle_3 \otimes |0\rangle_4 = \\ &= \exp \left[\left(\alpha\sqrt{T} + i\beta\sqrt{1-T} \right) \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger - \left(\alpha^*\sqrt{T} + (i\beta)^*\sqrt{1-T} \right) \hat{\mathbf{a}}_3 \right] \times \\ &\times \exp \left[\left(i\alpha\sqrt{1-T} + \beta\sqrt{T} \right) \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger - \left((i\alpha)^*\sqrt{1-T} + \beta^*\sqrt{T} \right) \hat{\mathbf{a}}_4 \right] |0\rangle_3 \otimes |0\rangle_4 = \\ &= \hat{\mathbf{D}}_3 \left(\sqrt{T}\alpha + i\sqrt{1-T}\beta \right) \hat{\mathbf{D}}_4 \left(i\sqrt{1-T}\alpha + \sqrt{T}\beta \right) |0\rangle_3 \otimes |0\rangle_4 = \\ &= \left| \sqrt{T}\alpha + i\sqrt{1-T}\beta \right\rangle_3 \otimes \left| i\sqrt{1-T}\alpha + \sqrt{T}\beta \right\rangle_4, \end{aligned} \quad (4.13)$$

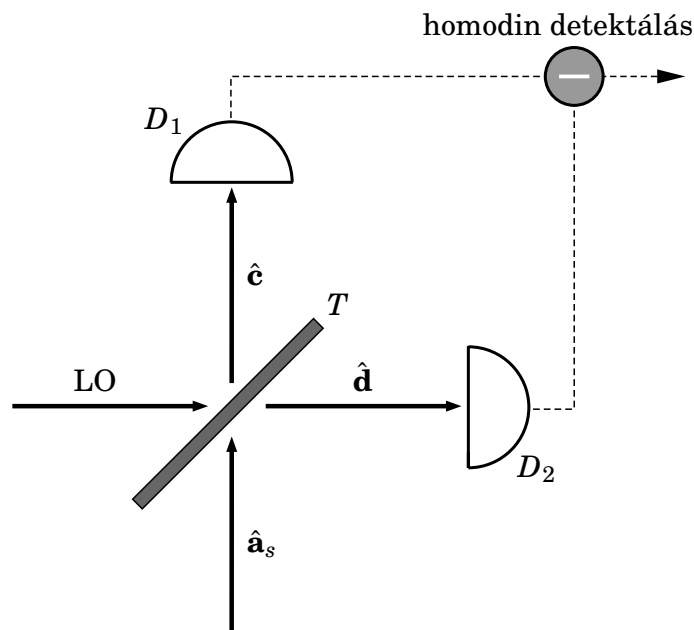
a (4.12) képlettel definiált nyalábosztó transzformációt koherens-reprezentációban

$$|\alpha\rangle_1 \otimes |\beta\rangle_2 \rightarrow \left| \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} \right\rangle_3 \otimes \left| \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}} \right\rangle_4 \quad (4.14)$$

alakban írhatjuk fel.

4.2. Homodin mérés és N -foton detektálás

Homodin detektálás egy kvantummechanikai mérés, amely a kvadratúrák mérésére lett kidolgozva. Az általános koncepció szerint az eljárás detektálandó intenzív koherens jelek keveréséből áll, és azonos frekvenciájú térerősségek intenzitásainak a különbségét méri. Ha a térerősségek frekvenciái nem azonosak, akkor heterodin detektálásról szokás beszélni. Az intenzív koherens jelet lokális oszcillátornak nevezzük, amely egy viszonylag erős lézernyaláb. A homodin detektálást a 4.2. ábra mutatja.



4.2. ábra. A veszteségmentes homodin detektálás alapjének sematikus vázlata.

Az ábra alapján az \hat{a}_s módus jelöli azt a jelforrás operátorát, amit mérni szeretnénk, az LO pedig a lokális oszcillátort. Az elrendezés tartalmaz egy nyálábosztót, valamint két nagy hatásfokú fotodetektort. A homodin mérési eljárást „kiegyensúlyozott”-nak nevezzük (angolul balanced), ha a nyálábosztó átteresztőképessége: $T = \frac{1}{2}$, ebben az esetben a kimenő módusok transzformált alakjai:

$$\hat{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + i\hat{b}), \quad (4.15)$$

$$\hat{d} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i\hat{a} + \hat{b}). \quad (4.16)$$

A fotodetektorokkal az átlagos fotonszámot detektálhatjuk, azaz a fotonszám-operátorok várható értékeit, különbségüket pedig a következő módon határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned}\langle \hat{n}_d \rangle &= \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} - \hat{d}^\dagger \hat{d} \rangle = \langle i(\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}) \rangle = \\ &= \langle \psi | \langle \beta | i(\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}) | \beta \rangle | \psi \rangle = i \left(|\beta| \cdot e^{i\phi_L} \langle \hat{a}^\dagger \rangle - |\beta| \cdot e^{-i\phi_L} \langle \hat{a} \rangle \right) = \\ &= |\beta| \cdot \left(\langle \hat{a} \rangle \cdot e^{-i\theta} + \langle \hat{a}^\dagger \rangle \cdot e^{i\theta} \right) \propto \langle \hat{X}(\theta) \rangle,\end{aligned}\quad (4.17)$$

ahol $\theta = \phi_L + \frac{\pi}{2}$, valamint a ϕ_L a lokális oszcillátor fázisszöge. Ezzel elmondható, hogy az intenzitások különbsége, amelyet a homodin detektálás módszerével mértünk meg, egyenesen arányos a bemenő fénymódus $\hat{X}(\theta)$ kvadratúrájával. Ebből adódóan, a lokális oszcillátor fázisának változtatásával a térerősség egy tetszőleges kvadratúrája mérhető. Ez a homodin detektálás alapelve. A homodin mérés leírható a $|x_\lambda\rangle$ -val jelölt kvadratúraoperátor sajátállapotával, azaz teljesülnie kell az alábbi sajátérték-egyenletnek:

$$\hat{X}_\lambda |x_\lambda\rangle = x_\lambda |x_\lambda\rangle. \quad (4.18)$$

A kvadratúra-sajátállapot felírható fotonszámállapot-reprezentációban, valamint exponenciális alakban:

$$\begin{aligned}|x_\lambda\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|x_\lambda\rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x_\lambda) |n\rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x_\lambda^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x_\lambda) \cdot \left(\frac{\hat{a}^\dagger e^{i\lambda}}{\sqrt{2}} \right)^n |0\rangle = \\ &= \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2}x_\lambda^2 - \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger e^{i\lambda})^2 + \sqrt{2}x_\lambda \hat{a}^\dagger e^{i\lambda} \right] |0\rangle,\end{aligned}\quad (4.19)$$

ahol alkalmaztuk a (2.148) azonosságot. A $\psi_n(x_\lambda)$ a harmonikus oszcillátor energia-sajátfüggvénye helykoordináta-reprezentációban:

$$\psi_n(x_\lambda) = \langle n|x_\lambda\rangle = \frac{\pi^{-\frac{1}{4}}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{n!}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x_\lambda^2} \cdot H_n(x_\lambda) \cdot e^{in\lambda}. \quad (4.20)$$

A koherens állapot kvadratúra-reprezentációját

$$\langle x_\lambda|\alpha\rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2}x_\lambda^2 + \sqrt{2}e^{-i\lambda}x_\lambda\alpha - \frac{1}{2}e^{-2i\lambda}\alpha^2 \right] \cdot \exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{2} \right) \quad (4.21)$$

alakban írhatjuk fel. A sajátérték-egyenlet bizonyításához egy helykoordináta jellegű kvadratúraoperátort kell alkalmazni. Ehhez alkalmazzuk a fotoneltüntető és fotonkeltő operátort leíró (2.17) és (2.18) képleteket és vesszük a $\hbar = \omega = 1$ egységrendszer:

$$\hat{x}_\lambda = \sqrt{2} \cdot \hat{X}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}e^{-i\lambda} + \hat{a}^\dagger e^{i\lambda} \right). \quad (4.22)$$

Ennek ismeretében könnyen bizonyítható a sajátérték-egyenlet:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_\lambda |x_\lambda\rangle &= \frac{\pi^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x_\lambda^2} \cdot (\hat{\mathbf{a}}e^{-i\lambda} + \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\lambda}) \cdot e^{-\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\lambda})^2} \cdot e^{\sqrt{2}x_\lambda \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\lambda}} |0\rangle = \\
 &= \frac{\pi^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x_\lambda^2} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\lambda})^2} \cdot e^{\sqrt{2}x_\lambda \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\lambda}} \cdot e^{-\sqrt{2}x_\lambda \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\lambda}} \cdot e^{\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\lambda})^2}}_{\hat{\mathbf{I}}} \times \\
 &\quad \times (\hat{\mathbf{a}}e^{-i\lambda} + \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\lambda}) \cdot e^{-\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\lambda})^2} \cdot e^{\sqrt{2}x_\lambda \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\lambda}} |0\rangle = x_\lambda |x_\lambda\rangle,
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

amelynek bizonyításához a következő összefüggések szükségesek:

$$e^{\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\lambda})^2} \cdot (\hat{\mathbf{a}}e^{-i\lambda} + \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\lambda}) \cdot e^{-\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\lambda})^2} = \hat{\mathbf{a}}e^{-i\lambda}, \tag{4.24}$$

$$e^{-\sqrt{2}x_\lambda \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\lambda}} \cdot \hat{\mathbf{a}}e^{-i\lambda} \cdot e^{\sqrt{2}x_\lambda \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\lambda}} = \hat{\mathbf{a}}e^{-i\lambda} + \sqrt{2}x_\lambda. \tag{4.25}$$

a (2.26) összefüggés alkalmazásával.

Az N -foton detektálást kísérletileg ún. fotonszámfeloldó detektorokkal valósíthatjuk meg, amelyek olyan optikai eszközök, amelyekkel meghatározhatjuk a detektált fotonok számát az adott optikai impulzusban. Ezek a fotonszámfeloldó detektorok napjainkban is intenzív fejlesztés alatt állnak. A legismertebbek közé tartoznak azok a fotonszámfeloldó detektorok, amelyek átmeneti szenzorokat (angolul Transition Edge Sensor, TES), és szupravezető nanovezetékeket tartalmaznak, és számos sikeres kísérletben alkalmazták. Egy ideális fotodetektor a következő mérési projektorral modellezhető:

$$\hat{\Pi}_n = |n\rangle\langle n|, \tag{4.26}$$

ahol n a mérési eredmény, amely a fotonok számának felel meg a mérendő fényállapotban.

5. fejezet

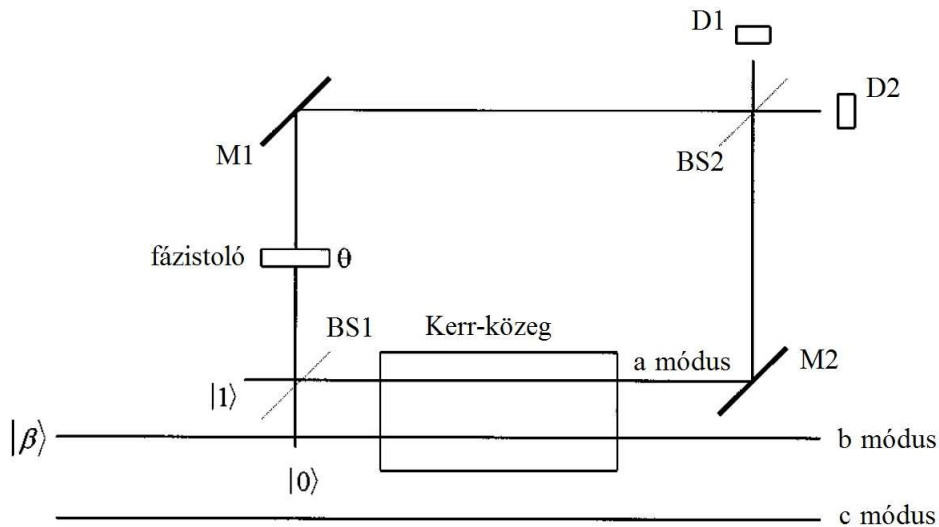
A fény nemklasszikus állapotainak előállítása

A nemklasszikus fényállapotok előállításának kutatásában két fő irány különböztethető meg. Az egyik az optikai rezonátorokban, üregekben történő állapot-előállítás, a másik az állapotok haladóhullámú előállítása. Optikai rezonátorokban, az üregben csapdázott, illetve áthaladó atomok kölcsönhatását felhasználva módszerek léteznek különböző nemklasszikus állapotok előállítására. A nemklasszikus állapotok haladóhullámú előállításának két fajtája különböztethető meg. Az egyik valamilyen nemlineáris optikai folyamaton alapuló közvetlen előállítás, amely rendszer esetenként visszacsatolást is tartalmazhat. A másik módszer a feltételes módon történő állapot-előállítás, amelynek lényege, hogy egy kétmódusú állapot egyik módusán történő mérés meghatározott eredménye esetén a másik módus a kívánt állapotba kerül. Az első módszerre a spontán parametrikus lekonverzió alapuló állapot-előállítás (amellyel például összenyomott állapotok állíthatók elő). Ha a lekonverzió rezonátorban történik, akkor parametrikus oszcillátorról beszélünk.

Fontos szerepet játszanak azok a kvantumállapot-tervezéssel foglalkozó kutatások (angolul quantum state engineering), melynek célja, hogy egyetlen kísérleti elrendezésben lehessen több, tetszőleges nemklasszikus állapotot előállítani. Ezek a haladóhullámú rendszerek lineáris optikai elemekből, nyalábosztókból és detektorokból állnak. Ebben a jegyzetben csak az ilyen típusú rendszerekről lesz szó.

5.1. Makroszkopikus kvantumsuperpozíció előállítása Kerr-közegben

A koherens állapotok szuperpozíciójának előállítására alkalmas kísérleti elrendezést az 5.1. ábra mutatja, amely tulajdonképpen egy Mach-Zehnder interferométer, melynek egyik ágában (a módus) egy Kerr-közeg található, ahol a módus kölcsönhat a b módussal, amelyben a kívánt szuperpozíciót akarjuk előállítani¹. Az 5.1. ábrán látható c módus csak akkor érdekes, ha a b módus összefonódott egy másik módussal. A rendszer egyik bemenetén egy egyfotonállapot a másik bemenetén pedig egy vákuumállapot található, a b módus pedig $|\beta\rangle$ koherens állapotban van.



5.1. ábra. Kísérleti elrendezés koherens állapotok szuperpozíciójának haladóhullámú előállítására.

Az ábra alapján az első nyáláosztó (BS1) után a rendszer állapota:

$$(|1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2) |\beta\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,0\rangle + i|0,1\rangle) |\beta\rangle. \quad (5.1)$$

Az 5.1. ábrán láthatjuk, hogy az egyik tükör előtt egy Kerr-közeg, a másik tükör előtt egy fázistoló található. Tehát a tükrök előtt a rendszer állapota:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\theta} |1,0\rangle \otimes |\beta\rangle + i|0,1\rangle \otimes |\beta e^{-i\varphi}\rangle \right), \quad (5.2)$$

¹Christopher C. Gerry, Phys. Rev. A **59**, 4095 (1999).

ahol $\varphi = \frac{KL}{v}$, ahol K egy nemlineáris együttható, L a Kerr-közeg hossza, v a Kerr-közegbeli fénysebesség. Ezután az M1 és M2 tükrök hatására a fénymódusok $\frac{\pi}{2}$ fázistolást szenvednek, de ezt elhanyagolhatjuk. Végül a második nyálábosztó (BS2) hatása a rendszer állapotát a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\theta} |1,0\rangle \otimes |\beta\rangle + i |0,1\rangle \otimes |\beta e^{-i\varphi}\rangle \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{2} \left[|1,0\rangle \left(e^{i\theta} |\beta\rangle - |\beta e^{-i\varphi}\rangle \right) + i |0,1\rangle \left(e^{i\theta} |\beta\rangle + |\beta e^{-i\varphi}\rangle \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ha a D1 (D2) detektor jelez, D2 (D1) detektor pedig nem, akkor az azt jelenti, hogy a $|1,0\rangle$ ($|0,1\rangle$) állapotot detektáltuk, így a b módusban az alábbi (normálatlan) állapotban lesz:

$$|\beta\rangle \mp e^{-i\theta} |\beta e^{-i\varphi}\rangle. \quad (5.4)$$

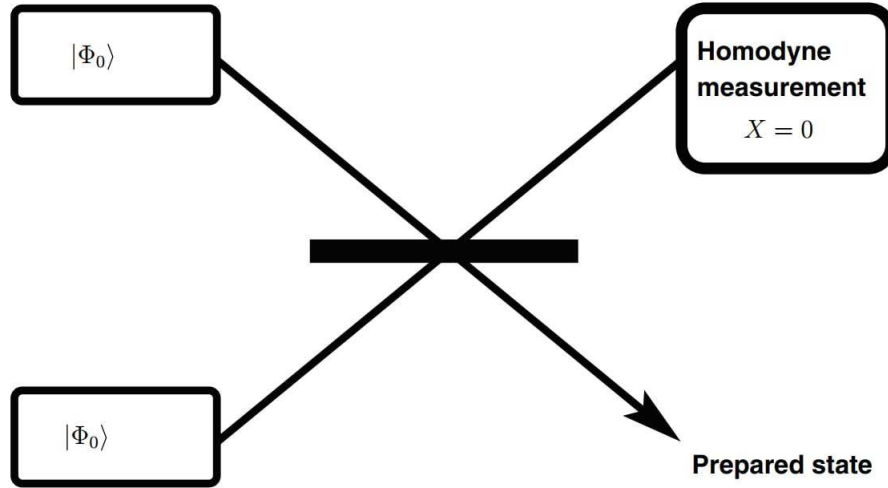
Ezt az állapotot Kerr-állapotnak hívjuk. Ha a Kerr-közeg elég hosszú, vagy K értéke elég nagy oly módon, hogy $\varphi = \pi$, és ha $\theta = 0$, akkor a Kerr-állapot páratlan és páros Schrödinger-macska állapottá válik, a $\theta = \frac{\pi}{2}$ esetben az ún. Yurke-Stoler féle állapotot kapjuk. A Kerr-állapotot leíró (5.4) képlet előállításának valószínűsége

$$P(\theta, \varphi)_{\mp} = \frac{1}{2} \{ 1 \mp \exp[-|\beta|^2 (1 - \cos(\varphi))] \cdot \cos(\theta + |\beta|^2 \sin(\varphi)) \} \quad (5.5)$$

szerint alakul. Természetesen ez a kifejezés a $|0,1\rangle$, illetve a $|1,0\rangle$ állapot detektálásának is a valószínűsége. A Kerr-állapot, mint kiinduló állapot azonban alkalmas a Schrödinger-macska állapotok feltételes előállítására. Ezt mutatjuk meg a következő fejezetben.

5.2. Schrödinger-macska állapotok haladóhullámú előállítása (feltételes módon)

Az optikai Schrödinger-macska állapotok haladóhullámú feltételes előállítására alkalmas optikai elrendezést az 5.2. ábrán láthatjuk.



5.2. ábra. Kísérleti elrendezés Schrödinger-macska állapotok haladóhullámú feltételes előállítására kis szeparációjú koherens állapotok szuperpozíciójával.

Az 5.2. ábra alapján a rendszer bemenő állapotaira feltételezzük, hogy kis szeparációjú koherens-szuperpozícióban vannak:

$$|\Phi_0\rangle = \mathcal{N}_{\Phi_0}(|\alpha\rangle + |\alpha e^{-i\varphi}\rangle), \quad (5.6)$$

ahol \mathcal{N}_{Φ_0} a normálási együttható. Ahhoz, hogy a létrehozandó koherens-szuperpozíció a fázistér valós egyenesé mentén helyezkedjen el, akkor a kezdeti koherens-szuperpozíció amplitúdójának fázisát úgy kell beállítani, hogy $\arg(\alpha) = \frac{\pi + \varphi}{2}$. A nyálábosztó transzformáció előtt az optikai rendszer kétmódusú állapotát a következő módon írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} |\Phi_0\rangle_1 \otimes |\Phi_0\rangle_2 = \mathcal{N}_{\Phi_0}^2 \cdot & \left(\left| \alpha_0 i e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_1 \otimes \left| \alpha_0 i e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_2 + \left| \alpha_0 i e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_1 \otimes \left| \alpha_0 i e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_2 + \right. \\ & \left. + \left| \alpha_0 i e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_1 \otimes \left| \alpha_0 i e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_2 + \left| \alpha_0 i e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_1 \otimes \left| \alpha_0 i e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_2 \right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

A nyálábosztó transzformáció koherens-reprezentációban:

$$|\alpha\rangle_1 \otimes |\beta\rangle_2 \rightarrow \left| \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} \right\rangle_3 \otimes \left| \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}} \right\rangle_4, \quad (5.8)$$

amelyet alkalmazva az optikai rendszer kétmódusú kimenő állapotát

$$|\psi_{\text{out}}\rangle_{34} = \mathcal{N}_{\text{out}} \cdot \left[\left(\left| \sqrt{2i}\alpha_0 e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_3 + \left| \sqrt{2i}\alpha_0 e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_3 \right) |0\rangle_4 + \left| \sqrt{2i}\alpha_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right\rangle_3 |\text{cat}\rangle_4 \right], \quad (5.9)$$

alakban írhatjuk fel, ahol $|\text{cat}\rangle_4$ a Schrödinger-macska állapotot jelöli a fázistér valós egyenese mentén:

$$|\text{cat}\rangle_4 = \mathcal{N}_{\text{cat}} \cdot \left(\left| \sqrt{2}\alpha_0 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right\rangle_4 + \left| -\sqrt{2}\alpha_0 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right\rangle_4 \right). \quad (5.10)$$

Homodin mérést hajtunk végre a megfelelő móduson az $X_{\lambda=0} = 0$ esetben, így

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = \mathcal{N}_{\text{out}_4} \cdot (c_1 |0\rangle_4 + c_2 |\text{cat}\rangle_4) \quad (5.11)$$

kimenő állapotot kapjuk, ahol a szuperpozíció együtthatói és a normálási együttható:

$$\begin{aligned} c_1 &= \langle X_{\lambda=0} = 0 | \sqrt{2}\alpha_0 e^{i\frac{\varphi}{2}} \rangle + \langle X_{\lambda=0} = 0 | \sqrt{2}\alpha_0 e^{-i\frac{\varphi}{2}} \rangle = \\ &= \pi^{-\frac{1}{4}} \left[\exp\left(\alpha_0^2 e^{i\varphi} - \alpha_0^2\right) + \exp\left(\alpha_0^2 e^{-i\varphi} - \alpha_0^2\right) \right] = \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\approx \pi^{-\frac{1}{4}} \left[e^{i\alpha_0^2\varphi} + e^{-i\alpha_0^2\varphi} \right] = 2\pi^{-\frac{1}{4}} \cdot \cos(\alpha_0^2\varphi),$$

$$c_2 = \langle X_{\lambda=0} = 0 | \sqrt{2}\alpha_0 i \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{\alpha_0^2 \cos(\frac{\varphi}{2})} \cdot e^{-\alpha_0^2 \cos(\frac{\varphi}{2})} = \pi^{-\frac{1}{4}}, \quad (5.13)$$

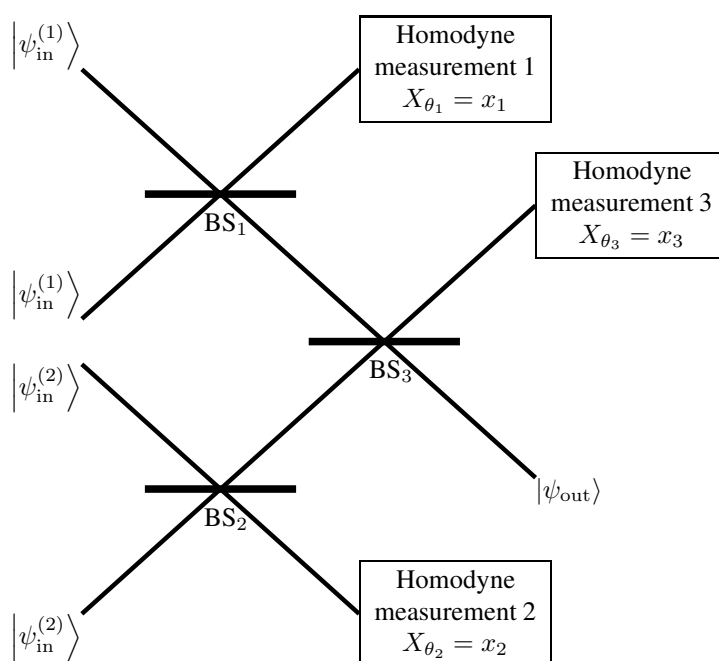
ahol $\varphi \ll 1$ esetén $\sin(\varphi) \approx \varphi$ és így $e^{\pm i\varphi} \approx 1 \pm i\varphi$, valamint alkalmaztuk a koherens állapot kvadratúra-reprezentációját leíró (4.21) képletet. Cél, hogy a c_1 vákuumállapot együtthatója zérus, vagy c_2 együtthatóhoz képest elhanyagolható legyen. A c_1 együttható akkor lesz zérus, ha $\alpha_0^2\varphi = \frac{\pi}{2}$, így az α_0 komplex paraméterre az alábbi feltételt kapjuk:

$$\alpha_0^{\min} = \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi}}. \quad (5.14)$$

Ezzel elmondható, hogy ezzel az optikai elrendezéssel Schrödinger-macska állapotok feltételesen előállíthatók jó közelítéssel.

5.3. Egyenesen és rácson vett koherens-szuperpozíció haladóhullámú feltételes előállítása

Az előző fejezetben ismertetett rendszert alkalmazva adódik a lehetőség egy olyan összetett optikai rendszer létrehozására, amellyel a fény sok nevezetes nemklasszikus állapota állítható elő nagy pontossággal. Tehát a következőkben egy olyan optikai elrendezésről lesz szó, amelynek során az 5.2. ábrán látható elrendezést felhasználva egy olyan összetett optikai elrendezés vázolható fel, amelyet az 5.3. ábrán láthatunk.



5.3. ábra. Kísérleti elrendezés a fény sok nevezetes nemklasszikus állapotainak haladóhullámú feltételes előállítására koherens állapotok szuperpozíciójával.

Az előző fejezetben ismeretett optikai rendszerrel tulajdonképpen egy origó középpontú koherens-szuperpozíció állítható elő a fázistér valós egyenese mentén. Felvetődhet az a kérdés, hogy az 5.3. ábrán látható elrendezés segítségével milyen „geometriájú” koherens állapot-szuperpozíció hozható létre a fázistérben.

Első körben tegyük fel, hogy a rendszer bemenő állapotai a kezdeti kis szeparációjú koherens-szuperpozíciót leíró (5.6) képlet szerinti állapotban vannak, így ezért a két alrendszer kimenő állapota a BS1, illetve a BS2 nyálábosztó után hasonló módon írható fel, mint az előző fejezetben meghatározott kimenő állapotot leíró (5.11) képlet, azaz

$$|\psi_{\text{mid}}^{(1)}\rangle = \mathcal{N}_{\psi^{(1)}} (a_0|0\rangle + a_1|\text{cat}\rangle), \quad (5.15)$$

$$|\psi_{\text{mid}}^{(2)}\rangle = \mathcal{N}_{\psi^{(2)}} (b_0|0\rangle + b_1|\text{cat}\rangle), \quad (5.16)$$

ahol az együtthatók:

$$a_0 = \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_1=0} = x_1 | \sqrt{2}aie^{i\frac{\varphi}{2}} \rangle + \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_1=0} = x_1 | \sqrt{2}aie^{-i\frac{\varphi}{2}} \rangle, \quad (5.17)$$

$$a_1 = \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_1=0} = x_1 | \sqrt{2}ai \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \rangle, \quad (5.18)$$

$$b_0 = \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_2=0} = x_2 | \sqrt{2}aie^{i\frac{\varphi}{2}} \rangle + \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_2=0} = x_2 | \sqrt{2}aie^{-i\frac{\varphi}{2}} \rangle, \quad (5.19)$$

$$b_1 = \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_2=0} = x_2 | \sqrt{2}ai \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \rangle. \quad (5.20)$$

A továbbiakban a kimenő állapotokat leíró (5.15) és (5.16) képletek fogják játszani a harmadik alrendszer bemenő állapotait. Ezután a nyálábosztó transzformáció előtt a harmadik alrendszer kétmódusú bemenő állapotát a következő módon írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{mid}}^{(1)}\rangle \otimes |\psi_{\text{mid}}^{(2)}\rangle &= a_0b_0|0\rangle|0\rangle + a_0b_1|0\rangle|\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle + a_0b_1|0\rangle|-\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle + \\ &+ a_1b_0|\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|0\rangle + a_1b_0|-\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|0\rangle + \\ &+ a_1b_1|\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle + a_1b_1|\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|-\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle + \\ &+ a_1b_1|-\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle + a_1b_1|-\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|-\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle. \end{aligned} \quad (5.21)$$

A BS3 nyálábosztó után a kétmódusú kimenő állapot a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{out}}\rangle_{34} &= a_0b_0|0\rangle|0\rangle + a_0b_1|\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|-\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle + a_0b_1|-\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle + \\ &+ a_1b_0|\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle + a_1b_0|-\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|-\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle + \\ &+ a_1b_1|2\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|0\rangle + a_1b_1|0\rangle|2\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle + \\ &+ a_1b_1|0\rangle|-2\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle + a_1b_1|-2\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|0\rangle. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Alkalmazva, hogy $\varphi \ll 1$ esetén $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \approx \frac{\varphi}{2}$, valamint bevezetve egy új jelölés módot, azaz $d := \frac{\alpha\varphi}{2}$, homodin mérés után az optikai rendszer kimenő állapotát

$$|\psi_{\text{out}}\rangle^{(\text{line})} = \mathcal{N}_{\text{out}} \cdot \sum_{n=1}^5 c_n |(n-3) \cdot d\rangle \quad (5.23)$$

alakban írhatjuk fel, ahol a szuperpozíció együtthatói:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 b_1 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | 0 \rangle, \\ c_2 &= a_1 b_0 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | -d \rangle + a_0 b_1 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | d \rangle, \\ c_3 &= a_1 b_1 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | -2d \rangle + a_0 b_0 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | 0 \rangle + a_1 b_1 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | 2d \rangle, \\ c_4 &= a_0 b_1 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | -d \rangle + a_1 b_0 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | d \rangle, \\ c_5 &= a_1 b_1 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Tehát ebben az esetben 5 koherens állapotból álló szuperpozíció hozható létre a fázistér valós egyenese mentén.

A következőkben úgy állítjuk be a második alrendszer bemenő állapotának a fázisát, hogy $\arg(\alpha) = \frac{\varphi}{2}$, így a BS1 és a BS2 nyálábosztó után a fénymódusok

$$|\psi_{\text{mid}}^{(1)}\rangle = \mathcal{N}_{\psi^{(1)}} (\alpha_0 |0\rangle + a_1 |\text{cat}\rangle), \quad (5.25)$$

$$|\psi_{\text{mid}}^{(2)}\rangle = \mathcal{N}_{\psi^{(2)}} (b'_0 |0\rangle + b'_1 |\text{cat}'\rangle) \quad (5.26)$$

állapotban vannak, ahol

$$|\text{cat}'\rangle = \left| \sqrt{2}\alpha i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right\rangle + \left| -\sqrt{2}\alpha i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right\rangle, \quad (5.27)$$

valamint az együtthatók:

$$b'_0 = \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_2=\frac{\pi}{2}} = y_2 | \sqrt{2}\alpha e^{i\frac{\varphi}{2}} \rangle + \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_2=\frac{\pi}{2}} = y_2 | \sqrt{2}\alpha e^{-i\frac{\varphi}{2}} \rangle, \quad (5.28)$$

$$b'_1 = \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_2=\frac{\pi}{2}} = y_2 | \sqrt{2}\alpha \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \rangle. \quad (5.29)$$

Jegyezzük meg, hogy a $|\psi_{\text{mid}}^{(2)}\rangle$ kimenő állapot tulajdonképpen a $|\psi_{\text{mid}}^{(1)}\rangle$ kimenő állapotnak az ortogonális vetülete.

A továbbiakban a kimenő állapotokat leíró (5.25) és (5.26) képletek fogják játszani a harmadik alrendszer bemenő állapotait. Ezután a nyalábosztó transzformáció előtt a harmadik alrendszer kétmódusú bemenő állapotát a következő módon írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
|\psi_{\text{mid}}^{(1)}\rangle \otimes |\psi_{\text{mid}}^{(2)}\rangle &= a_0 b'_0 |0\rangle|0\rangle + a_0 b'_1 |0\rangle|\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle + a_0 b'_1 |0\rangle|-\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle + \\
&+ a_1 b'_0 |\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|0\rangle + a_1 b'_0 |-\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|0\rangle + \\
&+ a_1 b'_1 |\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle + a_1 b'_1 |\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|-\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle + \\
&+ a_1 b'_1 |-\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle + a_1 b'_1 |-\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle|-\sqrt{2}\alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rangle.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Alkalmazzuk ismét, hogy $\varphi \ll 1$ esetén $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \approx \frac{\varphi}{2}$, valamint $d = \frac{\alpha\varphi}{2}$, így a BS3 nyalábosztó után a kétmódusú kimenő állapot a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned}
|\psi_{\text{out}}\rangle_{34} &= a_0 b'_0 |0\rangle|0\rangle + a_0 b'_1 |id\rangle|id\rangle + a_0 b'_1 |id\rangle|id\rangle + \\
&+ a_1 b'_0 |d\rangle|d\rangle + a_1 b'_0 |d\rangle|d\rangle + a_1 b'_1 |d+id\rangle|d-id\rangle + \\
&+ a_1 b'_1 |d-id\rangle|d+id\rangle + a_1 b'_1 |d-id\rangle|d-id\rangle + a_1 b'_1 |d-id\rangle|d-id\rangle.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Homodin mérés után a rendszer kimenő állapotát a következő alakban adhatjuk meg:

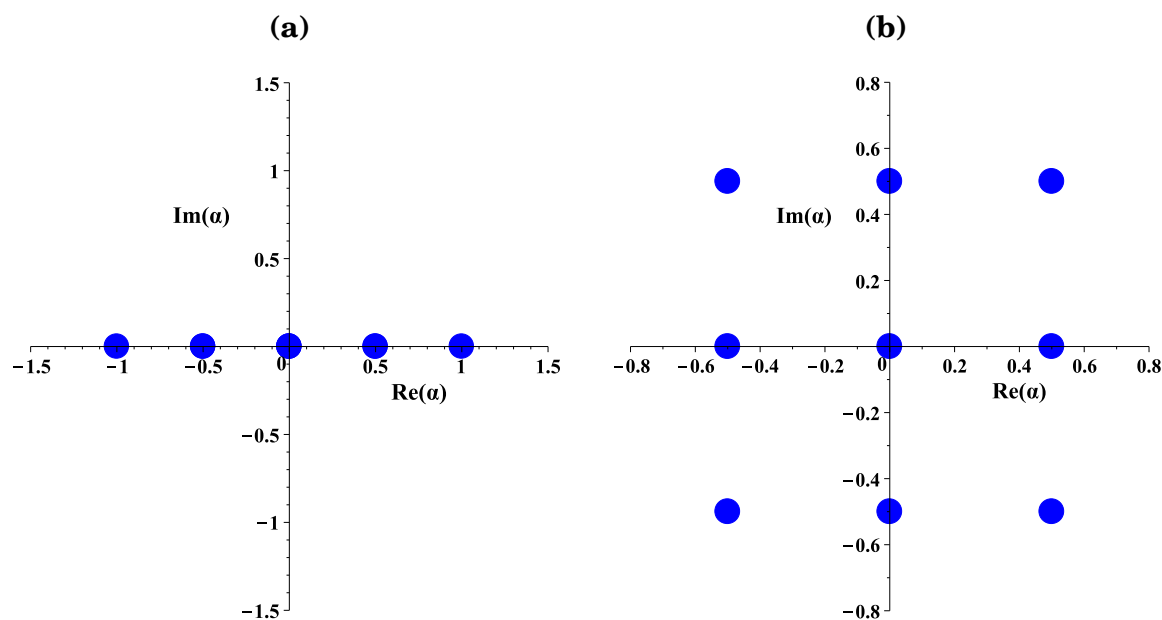
$$|\psi_{\text{out}}\rangle^{(\text{lattice})} = \mathcal{N}_{\text{out}} \cdot \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 c_{n,m} |-(n-2) \cdot id + (m-2) \cdot d\rangle, \tag{5.32}$$

ahol az együtthatók:

$$\begin{aligned}
c_{1,1} &= a_1 b'_1 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | -d - id \rangle, \\
c_{1,2} &= a_0 b'_1 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | -id \rangle, \\
c_{1,3} &= a_1 b'_1 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | d - id \rangle, \\
c_{2,1} &= a_1 b'_0 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | -d \rangle, \\
c_{2,2} &= a_0 b'_0 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | 0 \rangle, \\
c_{2,3} &= a_1 b'_0 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | d \rangle, \\
c_{3,1} &= a_1 b'_1 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | -d + id \rangle, \\
c_{3,2} &= a_0 b'_1 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | id \rangle, \\
c_{3,3} &= a_1 b'_1 \langle \hat{\mathbf{X}}_{\lambda_3=0} = x_3 | d + id \rangle.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Tehát ebben az esetben egy 3×3 -as rácsot alkotó koherens-szuperpozíció hozható létre a fázistérben.

Ebben a fejezetben egy olyan haladóhullámú kísérleti elrendezést mutattunk be részletesen, amellyel speciális koherens-szuperpozíciók állíthatók elő. Ezeket a speciális koherens-szuperpozíciókat az 5.4. ábrán láthatjuk.



5.4. ábra. Koherens állapotok szuperpozíciója (a) egyenesen és (b) rácson a fázistérben.

Az ábra alapján előállíthatunk 5 koherens állapotból álló szuperpozíciót a fázistér valós egyenesé mentén, illetve 9 koherens állapotból álló 3×3 -as rácsot a fázistérben.

A. függelék

Heisenberg-féle határozatlansági reláció

A Heisenberg-féle határozatlansági reláció (vagy összefüggés) egy alapvető, elméleti határ bizonyos fizikai mennyiségek egyszerre, teljes pontossággal való megismerhetőségére. Ilyen mennyiségpár például a hely és az impulzus, minél pontosabb értéke van az egyiknek, annál pontatlanabb a másikonak. Ebben a függelékben ezt a határozatlansági összefüggésnek az általános formuláját bizonyítjuk be.

Egy A megfigyelhető mennyiség esetén csak úgy kaphatunk $\Delta A = 0$ szórásértéket, ha az A megfigyelhető mennyiség sajátállapotában vagyunk. Legyen adott A és B két nem kommutáló operátor, melyeknél nem engedhetjük meg, hogy a szórásuk zérus legyen, mert különben a két operátor szimultán sajátállapotát kellene kapnunk. Tehát mi a legjobb, amit tehetünk? Vezessük be a következő operátorokat:

$$\hat{\mathbf{x}}' := \hat{\mathbf{x}} - \langle \hat{\mathbf{x}} \rangle \hat{\mathbf{I}}, \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{\mathbf{p}}' := \hat{\mathbf{p}} - \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle \hat{\mathbf{I}}, \quad (\text{A.2})$$

amelyeket felhasználva meghatározhatjuk a kommutációs relációt:

$$[\hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{p}}'] = \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{x}}\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle \hat{\mathbf{I}} - \langle \hat{\mathbf{x}} \rangle \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{p}} + \langle \hat{\mathbf{x}} \rangle \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle \hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{p}}\langle \hat{\mathbf{x}} \rangle \hat{\mathbf{I}} + \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{x}} - \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle \langle \hat{\mathbf{x}} \rangle \hat{\mathbf{I}} = [\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}] = i\hbar. \quad (\text{A.3})$$

A $\hat{\mathbf{x}}'$ és $\hat{\mathbf{p}}'$ operátor segítségével definiáljunk egy $|\phi\rangle$ állapotot a következő módon:

$$|\phi\rangle := (\hat{\mathbf{x}}' + i\lambda\hat{\mathbf{p}}')|\psi\rangle, \quad (\text{A.4})$$

ahol λ egy tetszőleges valós szám, $|\psi\rangle$ egy tetszőleges állapot. Minden λ és $|\psi\rangle$ esetén teljesülnie kell a $\langle\phi|\phi\rangle \geq 0$ összefüggésnek, azaz

$$\begin{aligned} \langle\phi|\phi\rangle &= \langle(\hat{\mathbf{x}}')^2\rangle - i\lambda\langle\hat{\mathbf{p}}'\hat{\mathbf{x}}'\rangle + i\lambda\langle\hat{\mathbf{x}}'\hat{\mathbf{p}}'\rangle + \lambda^2\langle(\hat{\mathbf{p}}')^2\rangle = \\ &= \Delta\hat{\mathbf{x}}^2 + i\lambda\langle[\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{p}}]\rangle + \lambda^2\Delta\hat{\mathbf{p}}^2 = \Delta\hat{\mathbf{x}}^2 - \lambda\hbar + \lambda^2\Delta\hat{\mathbf{p}}^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Ez nem más, mint egy kvadratikus polinom, azaz egy másodfokú függvény, amelynek általános alakja:

$$f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c. \quad (a > 0) \quad (\text{A.6})$$

Keressük meg a kvadratikus polinom minimum helyét:

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = 2a\lambda + b = 0 \rightarrow \lambda_{\min.} = -\frac{b}{2a}, \quad (\text{A.7})$$

amelyet behelyettesítve a másodfokú függvényt leíró (A.6) képletbe, és az $f(\lambda) \geq 0$ feltétel mellett:

$$f(\lambda_{\min.}) = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = c - \frac{b^2}{4a} \geq 0 \rightarrow ca \geq \frac{b^2}{4}. \quad (\text{A.8})$$

Összehasonlítva a kvadratikus polinomot leíró (A.5) összefüggéssel: $a = \Delta\hat{\mathbf{p}}^2$, $c = \Delta\hat{\mathbf{x}}^2$, valamint $b = -\hbar$, így azt kapjuk, hogy

$$\Delta\hat{\mathbf{x}}\Delta\hat{\mathbf{p}} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (\text{A.9})$$

Ezzel meghatároztuk a Heisenberg-féle határozatlansági reláció általános formuláját.

B. függelék

Kanonikus kvantálás

Induljunk ki abból, hogy egy k hullámszámvektorú, ω körfrekvenciájú síkhullám egy $p = \hbar k$ impulzusú és $E = \hbar\omega$ energiájú részecskemozgásnak a kvantummechanikai megfelelője. Így a síkhullám amplitúdóját, amelyet hullámfüggvénynek nevezünk, a következőképpen írhatjuk fel (az egyszerűség kedvéért egydimenzióban):

$$\psi(x, t) = \exp[i(kx - \omega t)] = \exp\left[i\left(\frac{p_x}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)\right] = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_x x - E t)\right]. \quad (\text{B.1})$$

Deriváljuk le a hullámfüggvényt x szerint:

$$\frac{d}{dx}\psi(x, t) = \frac{i}{\hbar}p_x\psi(x, t). \quad (\text{B.2})$$

Kvantálás során minden mérhető fizikai mennyiséghez hermitikus operátort rendelünk:

$$x \rightarrow \hat{\mathbf{x}}, \quad p \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}. \quad (\text{B.3})$$

Ezek ismeretében a kommutátoruk:

$$[\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}_x] = \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{p}}_x - \hat{\mathbf{p}}_x\hat{\mathbf{x}}. \quad (\text{B.4})$$

Szorozzuk be mindkét oldalt egy tetszőleges $\Psi(x)$ függvénnyel:

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}_x] \Psi(x) &= (\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{p}}_x - \hat{\mathbf{p}}_x\hat{\mathbf{x}})\Psi(x) = -i\hbar x \frac{d\Psi(x)}{dx} + i\hbar \frac{d}{dx}(x\Psi(x)) = \\ &= -x \cdot i\hbar \frac{d\Psi(x)}{dx} + x \cdot i\hbar \frac{d\Psi(x)}{dx} + i\hbar\Psi(x) = i\hbar\Psi(x). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Ha a fenti összefüggés minden $\Psi(x)$ -re teljesül, akkor a kommutátor értéke:

$$[\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}_x] = i\hbar. \quad (\text{B.6})$$

A Heisenberg-féle határozatlansági elv tehát azt fogalmazza meg, hogy az x koordináta és a hozzá kanonikusan konjugált p_x impulzus nem lehet egyszerre jól definiált értékű. Ez azt kell jelentse, hogy a fizikai rendszer semmiképpen sem lehet az $\hat{\mathbf{x}}$ és a $\hat{\mathbf{p}}_x$ operátor közös sajátállapotában, azaz hogy az egymáshoz kanonikusan konjugált mennyiségek operátorainak nem lehet közös sajátfüggvényrendszere. Ez azt jelenti, hogy a $[\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}_x]$ kommutátor nem zérus.

C. függelék

Fotoneltüntő és fotonkeltő operátor

Induljunk ki az egydimenziós időfüggetlen Schrödinger-egyenletből, amelyet helykoordináta-reprezentációban felírva:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right) \psi_n(x) = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \psi_n(x), \quad (\text{C.1})$$

ahol helykoordináta-reprezentációban $\hat{\mathbf{x}} = x$, és $\hat{\mathbf{p}}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$, valamint $\psi_n(x) = \langle x | \psi_n \rangle$. Cél, keresni olyan egyszerűbb felírasmódot találni a Hamilton-operátorra, amelynek alakja az energia-sajátértékekhez hasonlít.

Emeljünk ki a Hamilton-operátor kifejezéséből $\hbar\omega$ -t:

$$\hat{\mathbf{H}} = \hbar \omega \left(-\frac{\hbar}{2m\omega} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right). \quad (\text{C.2})$$

Ezután a zárójelben lévő kifejezést írjuk fel szorzatalakban:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar}{2m\omega} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 &= \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dx} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x\right) \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dx} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x\right) + \\ &+ \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dx} \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dx} = \\ &= \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dx} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x\right) \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dx} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x\right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} x - \frac{1}{2} x \frac{d}{dx} = \\ &= \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} i\hat{\mathbf{p}}_x\right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} i\hat{\mathbf{p}}_x\right) + \frac{1}{2} \frac{i}{\hbar} \underbrace{[\hat{\mathbf{p}}_x, \hat{\mathbf{x}}]}_{=1}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Ennek ismeretében a Hamilton-operátor:

$$\hat{\mathbf{H}} = \hbar \omega \left[\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} i\hat{\mathbf{p}}_x\right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} i\hat{\mathbf{p}}_x\right) + \frac{1}{2} \right] = \hbar \omega \left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2}\right), \quad (\text{C.4})$$

ahol $\hat{\mathbf{a}}$ fotoneltűntető operátor, az $\hat{\mathbf{a}}^\dagger$ pedig fotonkeltő operátor:

$$\hat{\mathbf{a}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} i\hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (m\omega \hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{p}}), \quad (\text{C.5})$$

$$\hat{\mathbf{a}}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} i\hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (m\omega \hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{p}}). \quad (\text{C.6})$$

Válasszuk úgy az $\hat{\mathbf{a}}$ és az $\hat{\mathbf{a}}^\dagger$ operátor szorzatát, hogy a Schrödinger-egyenletnek eleget tegyen. Legyen $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}}$, amely fotonszámállapot-reprezentációban:

$$\hat{\mathbf{n}} |n\rangle = \hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}} |n\rangle = \sqrt{n} \hat{\mathbf{a}}^\dagger |n-1\rangle = \sqrt{n} \sqrt{n-1+1} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (\text{C.7})$$

Az $\hat{\mathbf{n}}$ operátort szokás fotonszám-operátornak hívni. Mivel ez a szorzat kielégíti a sajátérték-egyenletet, így a Schrödinger-egyenlet alakja a fotoneltűntető és -keltő operátorral:

$$\hbar\omega \left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2} \right) \psi_n(x) = \hbar\omega \left(\hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{2} \right) \psi_n(x) = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \psi_n(x). \quad (\text{C.8})$$

Jegyezzük meg, hogy $\hat{\mathbf{n}} \neq \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}}^\dagger$, mivel ebben az esetben a sajátérték-egyenletet nem elégíti ki, azaz

$$\hat{\mathbf{n}} |n\rangle = \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} \hat{\mathbf{a}} |n+1\rangle = (n+1) |n\rangle \neq n |n\rangle. \quad (\text{C.9})$$

D. függelék

Exponenciális operátoralgebra

D.1. Baker-Hausdorff lemma

Ebben az alfüggelékben az ún. Baker-Hausdorff lemmát bizonyítjuk be két nem kommutáló operátor függvényben. Legyen egy $f(x)$ függvény a következő alakú:

$$f(x) = e^{x\hat{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{B}}e^{-x\hat{\mathbf{A}}}, \quad (\text{D.1})$$

ahol x egy valós paraméter. A következőkben vegyük az $f(x)$ Taylor-sorát:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots, \quad (\text{D.2})$$

majd határozzuk meg az $f(x)$ x szerinti deriváltjait:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \hat{\mathbf{A}}e^{x\hat{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{B}}e^{-x\hat{\mathbf{A}}} - e^{x\hat{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}e^{-x\hat{\mathbf{A}}} = \hat{\mathbf{A}}e^{x\hat{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{B}}e^{-x\hat{\mathbf{A}}} - e^{x\hat{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{B}}e^{-x\hat{\mathbf{A}}}\underbrace{\hat{\mathbf{A}}e^{x\hat{\mathbf{A}}}e^{-x\hat{\mathbf{A}}}}_{=1} = \\ &= \hat{\mathbf{A}}e^{x\hat{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{B}}e^{-x\hat{\mathbf{A}}} - e^{x\hat{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{B}}e^{-x\hat{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}f(x) - f(x)\hat{\mathbf{A}} = [\hat{\mathbf{A}}, f(x)], \\ f''(x) &= \hat{\mathbf{A}}f'(x) - f'(x)\hat{\mathbf{A}} = [\hat{\mathbf{A}}, f'(x)], \\ f'''(x) &= \hat{\mathbf{A}}f''(x) - f''(x)\hat{\mathbf{A}} = [\hat{\mathbf{A}}, f''(x)], \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \hat{\mathbf{A}}f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x)\hat{\mathbf{A}} = [\hat{\mathbf{A}}, f^{(n-1)}(x)]. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Mivel $f(0) = \hat{\mathbf{B}}$, ezért

$$\begin{aligned} f'(0) &= [\hat{\mathbf{A}}, f(0)] = [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}], \\ f''(0) &= [\hat{\mathbf{A}}, f(0)'] = [\hat{\mathbf{A}}, [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]], \\ f^{(3)}(0) &= [\hat{\mathbf{A}}, f(0)''] = [\hat{\mathbf{A}}, [\hat{\mathbf{A}}, [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]]], \text{ stb.} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Ezzel meghatároztuk a Baker-Hausdorff lemma általános formuláját:

$$e^{x\hat{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{B}}e^{-x\hat{\mathbf{A}}} = \hat{\mathbf{B}} + x[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] + \frac{x^2}{2!}[\hat{\mathbf{A}}, [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]] + \frac{x^3}{3!}[\hat{\mathbf{A}}, [\hat{\mathbf{A}}, [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]]] + \dots \quad (\text{D.5})$$

Speciális esetben $[\hat{\mathbf{A}}, [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]] = 0$, azaz $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] = \text{konstans}$, ekkor

$$e^{x\hat{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{B}}e^{-x\hat{\mathbf{A}}} = \hat{\mathbf{B}} + x[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]. \quad (\text{D.6})$$

A fenti levezetések ismeretében könnyen belátható, hogy a Baker-Hausdorff lemma legáltalánosabb formulát

$$e^{\pm x\hat{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{B}}e^{\mp x\hat{\mathbf{A}}} = \hat{\mathbf{B}} \pm x[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] + \frac{x^2}{2!}[\hat{\mathbf{A}}, [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]] \pm \frac{x^3}{3!}[\hat{\mathbf{A}}, [\hat{\mathbf{A}}, [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]]] + \dots \quad (\text{D.7})$$

szerint írhatjuk fel.

D.2. Baker-Campbell-Hausdorff formula

Ebben az alfejeletben az ún. Baker-Campbell-Hausdorff formulát bizonyítjuk be két nem kommutáló operátorra vonatkozóan. Elsőként a speciális esetet vizsgáljuk, amely azt jelenti, hogy $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] = \text{konstans}$. Legyen egy $f(x)$ függvény a következő alakú:

$$f(x) = e^{x\hat{\mathbf{A}}}e^{x\hat{\mathbf{B}}}. \quad (\text{D.8})$$

ahol x egy valós paraméter. A következőkben vegyük az $f(x)$ deriváltját:

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \hat{\mathbf{A}}e^{x\hat{\mathbf{A}}}e^{x\hat{\mathbf{B}}} + e^{x\hat{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{B}}e^{x\hat{\mathbf{B}}} = \hat{\mathbf{A}}e^{x\hat{\mathbf{A}}}e^{x\hat{\mathbf{B}}} + e^{x\hat{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{B}}\underbrace{e^{-x\hat{\mathbf{A}}}e^{x\hat{\mathbf{A}}}}_{=1}e^{x\hat{\mathbf{B}}} = \\ &= \left(\hat{\mathbf{A}} + e^{x\hat{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{B}}e^{-x\hat{\mathbf{A}}}\right)f(x) = \left(\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}} + x[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]\right)f(x), \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

ahol felhasználtuk a Baker-Hausdorff lemma speciális esetét leíró (D.6) képletet. A fenti differenciálegyenlet megoldásával és az $x = 1$ esetben kapjuk meg az

$$e^{\hat{\mathbf{A}}}e^{\hat{\mathbf{B}}} = \exp\left(\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}} + \frac{1}{2}[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]\right) \quad (\text{D.10})$$

Baker-Campbell-Hausdorff formula speciális esetét.

Általános esetben a (D.8) képletben szereplő $f(x)$ exponenciális függvényt felírjuk a következő módon:

$$e^{x\hat{A}}e^{x\hat{B}} = e^{\hat{G}(x)} = \exp(x\hat{G}_1 + x^2\hat{G}_2 + x^3\hat{G}_3 + \dots), \quad (\text{D.11})$$

és feltétezzük, hogy teljesül az alábbi azonosság:

$$e^{-x\hat{B}}e^{-x\hat{A}}\frac{d}{dx}e^{x\hat{A}}e^{x\hat{B}} = e^{-\hat{G}(x)}\frac{d}{dx}e^{\hat{G}(x)}. \quad (\text{D.12})$$

Az azonosság bal oldala a következőképpen fog alakulni:

$$\begin{aligned} e^{-x\hat{B}}e^{-x\hat{A}}\frac{d}{dx}e^{x\hat{A}}e^{x\hat{B}} &= e^{-x\hat{B}}\hat{B}e^{x\hat{B}} + e^{-x\hat{B}}e^{-x\hat{A}}\hat{A}e^{x\hat{A}}e^{x\hat{B}} = \hat{B} + e^{-x\hat{B}}\hat{A}e^{x\hat{B}} = \\ &= \hat{B} + \hat{A} - x[\hat{B}, \hat{A}] + \frac{x^2}{2!}[\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] - \frac{x^3}{3!}[\hat{B}, [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]]] + \dots, \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

a jobb oldal pedig

$$\begin{aligned} e^{-\hat{G}(x)}\frac{d}{dx}e^{\hat{G}(x)} &= \hat{G}'(x) + \frac{1}{2!}[\hat{G}'(x), \hat{G}(x)] + \frac{1}{3!}[[\hat{G}'(x), \hat{G}(x)], \hat{G}(x)] + \dots = \\ &= \hat{G}_1 + 2x\hat{G}_2 + x^2\left(3\hat{G}_3 - \frac{1}{2!}[\hat{G}_1, \hat{G}_2]\right) + \\ &+ x^3\left(4\hat{G}_4 - [\hat{G}_1, \hat{G}_3] - \frac{1}{6}[[\hat{G}_1, \hat{G}_2], \hat{G}_1]\right) + \mathcal{O}(x^4), \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\hat{G}'(x) = \hat{G}_1 + 2x\hat{G}_2 + 3x^2\hat{G}_3 + 4x^3\hat{G}_4 + \dots, \quad (\text{D.15})$$

$$\begin{aligned} [\hat{G}'(x), \hat{G}(x)] &= [\hat{G}_1 + 2x\hat{G}_2 + 3x^2\hat{G}_3 + 4x^3\hat{G}_4 + \dots, x\hat{G}_1 + x^2\hat{G}_2 + x^3\hat{G}_3 + x^4\hat{G}_4 + \dots] = \\ &= -x^2[\hat{G}_1, \hat{G}_2] - 2x^3[\hat{G}_1, \hat{G}_3] + \mathcal{O}(x^4), \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

$$[[\hat{G}'(x), \hat{G}(x)], \hat{G}(x)] = -x^3[[\hat{G}_1, \hat{G}_2], \hat{G}_1] + \mathcal{O}(x^4). \quad (\text{D.17})$$

Az azonosság két oldalát összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\hat{G}_1 &= \hat{A} + \hat{B}, \\
\hat{G}_2 &= -\frac{1}{2} [\hat{B}, \hat{A}] = \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}], \\
\hat{G}_3 &= \frac{1}{6} \left([\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \left[\hat{A} + \hat{B}, \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}] \right] \right) = \\
&= \frac{1}{6} \left([\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \frac{1}{2} (\hat{A} + \hat{B}) [\hat{A}, \hat{B}] - \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}] (\hat{A} + \hat{B}) \right) = \\
&= \frac{1}{6} \left([\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \frac{1}{2} \left([\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] \right) \right) = \\
&= \frac{1}{12} \left([\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] - [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] \right), \\
\hat{G}_4 &= \frac{1}{24} \left(-[\hat{B}, [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]]] + [[\hat{G}_1, \hat{G}_2], \hat{G}_1] + 6[\hat{G}_1, \hat{G}_3] \right) = \\
&= \frac{1}{24} \left\{ -[\hat{B}, [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]]] + \frac{1}{2} \left([[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]], \hat{A} + \hat{B}] + [[\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]], \hat{A} + \hat{B}] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + [\hat{A} + \hat{B}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + [\hat{A} + \hat{B}, [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]]] \right) \right\} = \\
&= \frac{1}{24} \left(-[\hat{B}, [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]]] + [[\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]], \hat{A} + \hat{B}] \right) = -\frac{1}{24} \left([\hat{A}, [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]]] \right).
\end{aligned} \tag{D.18}$$

Ezzel megkaptuk a Baker-Campbell-Hausdorff formula általános esetét:

$$\begin{aligned}
e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} &= \exp \left(\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12} \left([\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] - [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{24} \left([\hat{A}, [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]]] \right) + \dots \right).
\end{aligned} \tag{D.19}$$

A magasabb rendű tagok – bonyolultságukat tekintve – ebben a függelékben nem lettek meghatározva.

Ajánlott Irodalom

- I. Stephen M. Barnett, Paul M. Radmore: „*Methods in Theoretical Quantum Optics*”
(Oxford University Press, 1997)
- II. Christopher C. Gerry, Peter L. Knight: „*Introductory Quantum Optics*”
(Cambridge University Press, 2005)
- III. Zbigniew Ficek, Mohamed R. Wahiddin: „*Quantum Optics for Beginners*”
(CRC Press, 2014)
- IV. Rodney Loudon: „*The Quantum Theory of Light*” (Oxford, New York, 2000)
- V. Marlan O. Scully, M. Suhail Zubairy: „*Quantum Optics*”
(Cambridge University Press, 1997)
- VI. Mark Fox: „*Quantum Optics - An Introduction*” (Oxford University Press, 2006)
- VII. Daniel F. Walls, Gerard J. Milburn: „*Quantum Optics*” (Springer, 2008)