

Rendezett fázis  
vizsgálata fcc rácsban  
és  
nyílt dinamikák visszatérési  
idejének meghatározása

---

SINKOVICZ PÉTER

*Doktori disszertáció tézisei*



Rendezett fázis  
vizsgálata fcc rácsban  
és  
nyílt dinamikák visszatérési  
idejének meghatározása

---

SINKOVICZ PÉTER

*Doktori disszertáció tézisei*

TÉMAVEZETŐ:

DR. SZIRMAI GERGELY

*Tudományos munkatárs*

MTA WIGNER FK SZFKI



PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM  
Természettudományi Kar  
(2016)



# 1. Munkánk előzményei és motivációi

## 1.1. Átlagos visszatérési idő fizikai rendszerekben

A tudományos elméletek megjelenésének szükségességét megkövetelte a minket körülvevő makroszkopikus események időről-időre való bekövetkezésének megfigyelése. Ilyen periodikus események voltak például a nappalok és éjszakák váltakozásai, vagy az évszakok múlása és újbóli előkerülésük. A megfigyelt szabályszerűségek mögöttes természeti törvényre, illetve törvényekre utalnak. A példaként említett megfigyelések magyarázata a Föld forgásának, illetve keringésének figyelembe vételével tehető meg. Ezen érveléseket már az ókori kultúrákban is ismerték, továbbá észrevették, hogy egy év elteltével a Föld nem pontosan az azt megelőző pozíciójába tér vissza, hanem csak egy annak közeli pontjába. A megfigyeléseikből azonban arra következtettek, hogy bizonyos idő elteltével a Föld mégis visszatér a kezdeti pozíciójába, mely időt "Great Year"-nek, illetve "Platonic Year"-nek nevezték. Az akkori legpontosabb számításokat a babilóniaiak végezték, akik az egy évet 360 nappal azonosították (innen ered a teljes kör 360 fokra való felosztása), míg a Great Year-t 36.000 évvel[1, 2, 3]számolták.

Newton az 1687-ben megjelenő munkájával látszólag a teljes leírását megadta a naprendszerben található összes bolygó mozgásának megértéséhez[4], azonban több mint két testből álló rendszerre mégse sikerült konkrét megoldást találni. A megoldatlan problémák legegyszerűbbike a három test probléma volt[5], melyre a 19. század végére különböző kezdeti feltételek mellett már léteztek közelítő megoldások[6]. Ezzel ellentétben az egzaktak léte továbbra is nyitott kérdés maradt. II. Oscar svéd király 1887-ben közzétett felhívására Poincaré elkezdett foglalkozni ezzel a minimál problémával, amit azonban negatív eredménnyel zárt. Megállapította, hogy a problémát nem lehet zárt alakban megoldani. Ezenfelül a díj elnyerésében a további két pozitív eredménye is segítette. Egyrészt rámutatott arra, hogy a kezdeti feltételek kis vál-

toztatására - a korábban nem tapasztalt módon - a megoldás igen nagy különbségeket mutathat, mely érzékenységre a számolás során figyel-nünk kell. (Ezen észrevételéből forrott ki a káoszelmélet). Másrészt az adott problémán túlmutatóan bebizonyította, hogy ha egy folyamatban megmarad az állapotokhoz rendelt valószínűségi mérték, akkor a rendszer majdnem minden állapotába visszatér egy adott idő után (Poincaré idő)[7, 8, 9].

Poincaré sem az általa bevezetett visszatérési idő nagyságára, sem az átlagos visszatérések gyakoriságára sem tett semmiféle becslést. Erre egészen 1947-ig várni kellett, amikor is Kac bebizonyította, hogy ha egy állapot visszatérő, akkor végtelenszer visszatérő, valamint a róla elnevezett lemma segítségével meghatározta egy állapot átlagos visszatérési idejét. A Kac lemma értelmében egy állapot átlagos visszatérési ideje megegyezik az állapot egyensúlyi eloszlásának reciprokával[10]. A lemma erősségét a dolgozatban alaposabban ismertetem, így most csak egy szokatlan alkalmazását szeretném bemutatni: Hasonlítsuk össze a  $2^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sorozat első számjegyében a 7-es és a 8-as számjegyek előfordulásának gyakoriságát (10-es számrendszerben), valamint azt, hogy átlagosan hány lépés múlva lesz az első számjegy újból 7-es, illetve 8-as. A sorozat minden tagját felírhatjuk a  $2^n = B \cdot 10^k$  alakban, ahol  $1 \leq B < 10$  és  $k \in \mathbb{N}$ . Tehát ha  $7 \leq B < 8$ , akkor a sorozat adott elem 7-essel, míg  $8 \leq B < 9$  esetén 8-sal kezdődik. Véve az előző felbontásnak a tízes alapú logaritmusát, a következőt kapjuk:  $n \log(2) = k + \log(B)$ . Tehát minden egyes tag első számjegyét úgy kaphatjuk meg, hogy vesszük  $n$ -szer a  $\log(2)$ -t és annak az egész részét eldobva megnézzük, hogy a kapott szám mely két egész szám logaritmusá között van (ha a kapott szám  $[\log(7), \log(8))$  intervallumba esik, akkor a sorozat adott tagja a 7-es számjeggyel kezdődik). Mivel  $0 \leq \log(B) \leq 1$ , így mindkét oldalt  $2\pi$ -vel megszorozva az eredeti problémát egy egységkörön való forgásra képezhetjük le, melyben az egységnyi forgást a  $2\pi \log(2)$  nagyságú szög definiálja. Tehát a tagok kezdőszámjegyének egyensúlyi eloszlását a hozzájuk

tartozó egységkörön felvett  $2\pi$ -vel normált ívhosszakkal határozhatjuk meg, melyből annak a valószínűsége, hogy a  $2^n$  kifejezés 7-essel kezdődik:  $P_7 = \log(8) - \log(7) \approx 0.058$ , hasonlóan  $P_8 \approx \log(9) - \log(8) = 0.051$ . Tehát a Kac lemmából fakadóan átlagosan minden 7-es számjeggyel kezdődő tagot  $N_7 \approx 1/0.058 \approx 17.24$  lépés után egy újabb követi, míg 8-as esetén ez a szám:  $N_8 \approx 1/0.051 \approx 19.6$ . Vegyük észre, hogy az előző eredmény (néhány speciális hatványalaptól eltekintve) univerzális.

A makroszkopikus rendszerek leírásától eltávolodva módosítanunk kell a rendszert definiáló dinamikát. Tehát míg bizonyos klasszikus rendszerekben az időfejlődést egy transzfermátrix ismételt alkalmazásának segítségével adhattuk meg, addig a kvantumvilág egy zárt rendszerében ezt a dinamikát egy unitér operátor iterált alkalmazása váltja fel. Továbbá, míg klasszikus rendszerekben az átlagos első visszatérési idő definiálása nem ütközött semmilyen problémába, addig a kvantumvilágban ez a lépés már nem tehető meg egyértelműen, hiszen valahogy biztosítanunk kell a többszöri visszatérések elkerülését, ami valamiféle beavatkozást kíván meg. A beavatkozás egyik módja a folytonos monitorozás, azaz úgy módosítjuk a dinamikát, hogy minden egyes időlépés végén megmérjük, hogy a rendszer visszatért-e a kezdeti állapotába, és ha igen, akkor az adott folyamatot ott megállítjuk. A megállításhoz szükséges időt azonosítjuk a folyamathoz tartozó visszatérési idővel, és az így kapott visszatérési idők (a hozzájuk tartozó) relatív gyakoriságuk segítségével képzett átlagolásából már egyértelműen adódik az átlagos első visszatérési idő. Ezen protokoll mellett 2013-ben Grünbaum *et al.* azt találták, hogy egy tetszőleges, de környezettől elzárt fizikai rendszer egy tetszőlegesen kiválasztott állapotának az átlagos visszatérési ideje vagy egy egész szám, vagy végtelen[11].

## 1.2. Az SU(N) Heisenberg-modell alapállapota

Kellően alacsony hőmérsékleten a kondenzált anyagok bizonyos szabadsági fokai úgymond kifagynak, és így egy meghatározott struktúrát, kollektív tulajdonságot mutatnak. Például, amíg egyes részecskéi közti  $U$  kölcsönhatás energiájánál alacsonyabb -  $k_B T$  energiának megfelelő hőmérsékleten vizsgáljuk őket, addig kristályos anyagoknak tekinthetők. Ezen kristályokban folyó elektromos áram, spin-, illetve pályamomentumból kialakulhat egy egységes mágneses viselkedés, így bizonyos szilárd testek (akár külső mágneses tér nélkül is) rendelkezhetnek belső mágneses térrel. Az ilyen anyagokat ferromágneseknek, illetve ferrimágneseknek hívjuk, és a hozzájuk tartozó átalakulási hőmérsékletet pedig Curie-hőmérsékletnek nevezzük[12]. A ferromágnesekhez a következő szemléletes képet társíthatjuk: a kristály minden rácspontjához egy elemi mágneset rendelünk, melyek minden rácsponton azonos irányba mutatnak; ezzel szemben a ferrimágnesekben az elemi mágnesek különböző irányokba mutatnak, a kristály makroszkopikus mágnessége pedig az elemi mágnesek változó erősségéből ered[13]. A mágneses anyagok másik nagy csoportját a diamágnesek, paramágnesek és antiferromágnesek alkotják, ezekben ugyanis spontán módon nem alakul ki belső mágneses tér. Diamágnesekben a külső tér hatására egy azal ellentétes, míg a paramágneseknél egy azzal megegyező irányú belső mágneses mező jön létre. Antiferromágnesekben a szomszédos rácspontok ellentétes irányú mágneses rendeződést mutatnak, azonban a ferrimágnesekben az elemi mágnesek azonos erősségűek[14, 15, 16].

Egy szilárdtest rácspontján kialakuló elemi mágnesnek a teljes spinje egyaránt származhat a mag, és az elektronok mágneses- vagy pályamomentumaiból, de a környező momentumok árnyékoló hatásának eredményeképpen meg is rövidülhet. Ezen momentumok közti kölcsönhatás modellezésére alkalmazhatjuk a (izotrop) Heisenberg-modellt, mely figyelembe veszi a Pauli-elvet, a direkt és kinetikus kicserélődési mechanizmusokat. A Heisenberg-modell a szilárdtest spinjeinek



teljes kölcsönhatását párkölcsönhatások összegeként építi fel, melyek közötti  $J$  csatolást rácspont-függetlennek tekinti. Továbbá feltételezi, hogy ezen párkölcsönhatások nem képesek gerjeszteni az adott rácspont spinjét hordozó atomot, így a párkölcsönhatások leírására elegendő csupán az egyes kölcsönhatási tagok spin-forgató szerepére koncentrálnunk. A modell  $J$  paraméteréteer előjelétől függően a kristályban a ferromágneses ( $J < 0$ ), illetve az antiferromágneses rendeződés ( $J > 0$ ) a preferált.

A Heisenberg-modell látszólagos egyszerűségének ellenére jól leírja a minket körülvevő fizikai rendszereket, viszont egzakt megoldása bizonyos speciális esetektől eltekintve lehetetlen. A modell alapállapotának vizsgálata során különféle egzotikus fázisokba ütközünk, melyet első sorban a modellhez tartozó rác és az egyes rácspontok spinjének mérete befolyásol. Először, 1944-ben, L. Onsager egzakt számolásával bebizonyította, hogy négyzetrácsra tett SU(2) Heisenberg-modell alapállapota rendezett fázis is lehet[17, 18]; ezt követően megindult az SU(N) szimmetrikus Heisenberg-modell alapállapotának szimmetria tulajdonságának vizsgálata[19, 20, 21, 22, 23, 24, 25]. Az egyes eredmények azt mutatták, hogy végtelen nagy rendszerekben az alapállapot tetszőlegesen közel lehet a Néel-rendeződéshez, továbbá ezen rendeződésektől való eltérése pedig a rácsméret csökkentésével növekszik. Tehát véges, de kellően nagy rendszer vizsgálata során az alapállapot (bizonyos paramétertartományban) közelíthető klasszikus Néel-rendeződéssel. Azonban az alapállapot meghatározása során szem előtt kell tartanunk a Mermin-Wagner-tételt, miszerint véges hőmérsékleten csak két-dimenzió felett alakulhat ki rendeződés [26, 27, 28].



## 2. Eredményeink összegzése

### 2.1. Nyílt kvantumoz rendszerek átlagos első visszatérési ideje

A nyílt rendszerekkel való foglalkozásunkat egy 2013-ban megjelenő cikk inspirálta, melyben Grünbaum *et al.* megmutatta, hogy iterált unitér dinamikában a rendszer átlagosan egész lépés alatt tér vissza a kezdeti állapotába, melyre egy elég technikai toplogikus érvelést adtak. Ezt a problémát közelítettük meg és kötöttük össze a klasszikus dinamikákban ismert tétellel, mely szerint duplán sztochasztikus iterált dinamikákban az átlagos visszatérési idő megegyezik a kezdőállapothoz asszociált irreducibilis gráf méretével. Majd ezt a tételünket tovább általánosítottuk, mely eredményünknek a kvantum Kac lemma nevet adtuk.

Nyílt rendszerek vizsgálatának segítségével lehetőségünk nyílt arra, hogy a tisztán kvantumoz és a tisztán klasszikus rendszereket összekössük egy folytonos  $d$  dekoherencia paraméterrel, mely  $d = 0$  értéke mellett tisztán kvantumoz rendszert, míg  $d = 1$  esetén tisztán klasszikus dinamikát eredményez. Általánosan egy nyílt rendszer időfejlődését kvantum csatornával adhatjuk meg, mely Kraus-reprezentációja egy, az időfejlődés során változatlan környezetet feltételez a vizsgált rendszerünk körül. Ezen dinamika bevezetésével a duplán sztochasztikus határeseteket összekapcsoltuk és megmutattuk, hogy ha unitális a dinamika (mely mindkét limeszben teljesül), akkor az átlagos visszatérési idő kvantált marad és megegyezik a bolyongás során érintett Hilbert tér dimenziójával[III]. A kapott tétel alkalmazhatóságát, illetve meglepetésszerű viselkedését, valamint a folyamatban kitüntetett szerepet játszó ún. releváns Hilbert-teret különböző példákon át boncolgattuk, melyekben rámutattunk az állítás robusztusságára is.

A témában jobban elmélyülve észrevettem, hogy ha a rendszer egyensúlyi sűrűségoperátora saját állapota a kezdő állapotnak, akkor az átlagos első visszatérési idő meghatározható a rendszer egyensúlyi eloszlásából[I]. Az előző speciális esetekben ez a feltétel automatikusan teljesül, hiszen azokban az egyensúlyi eloszlás az egységoperátor számszorosa, így a talált tételünk szerint az állapot normálása során kapott szám reciproka éppen az átlagos visszatérési időt adja (mely összhangban van az unitális dinamikák során kapott eredményünkkel). Ezen általánosabb dinamikák során megadott tételünk klasszikus határesetben éppen a klasszikus Kac tétellel egyezik meg. Végezetül egy példán bemutattuk, hogy az általunk talált kvantum Kac lemma alkalmazható minden olyan iterált dinamikával hajtott rendszer két tetszőleges állapota közötti átlagos első elérési idő (hitting time) meghatározására, melyben az elérés tényének vizsgálatát egy klasszikus eszközzel tesszük meg.

## 2.2. SU(4) szimmetrikus anti-ferromágneses Heisenberg-modell fcc rácson

Spin rendszerek tanulmányozását már az MSc diplomamunkámmal megkezdtem, majd folytattam a PhD képzésben. Ezen rendszerek vizsgálata során törekedtem arra, hogy megértsem az SU(N) spinoperátorok különböző reprezentációját és azok alkalmazását, ehhez két fizikailag különböző modellt vizsgáltunk: SU(6) szimmetrikus antiferromágneses Heisenberg-modellt hatszögrácson[IV], SU(4) szimmetrikus antiferromágneses Heisenberg-modellt fcc rácson[II]. Mindkét modellben más reprezentációval dolgoztunk, hiszen az első modellben azt várjuk, hogy SU(6) szimmetrikus spinfolyadék alapállapot, míg a másodikban egy rendezett fázis alakul ki. Az első modellben kapott eredményeink bemutatása az MSc diplomamunkámat képezte, így a PhD dolgozatomban csak a másik modellre koncentráltam.

A rendezett fázis vizsgálata során a spin operátorok boson reprezentációját választottuk, mivel alapállapotban Bose-kondenzálódnak, azaz spontán megsértik az SU(4) forgatási szimmetriát. A spinek ezen reprezentációja egy négy operátoros kölcsönhatási tagot eredményezett, mely kezelésére spinhullám-számolást alkalmaztunk. A közelítés első lépéseként meghatároztunk az alapállapotban megvalósuló összes klasszikus rendeződést. A számolás során azt találtuk, hogy ez a rendeződés nem egyértelmű. Ezen lehetséges állapotok közül kiválasztottunk egy egyparaméteres sokaságot, ún. helikális állapotokat, majd ezen az altsínen kerestük a modell alapállapotát. A közelítés elvégzéséhez a boson operátorok Holstein-Primakoff reprezentációját vettük, melyben szemiklasszikus sorfejtést végeztünk. A sorfejtés segítségével meghatározhatóvá vált, hogy a kvantum fluktuációk vezető rendjében hogyan hasadnak fel a klasszikus közelítésben degenerált alapállapotok és hogy a közelítés eredményeképpen egyetlenegy fázis maradt, a rendszer alapállapota. Ezt a kiválasztás "order-by-disorder" mechanizmusnak nevezzük.

A kapott alapállapot stabilitását a spin rövidüléssel végeztük, mintegy önkonzisztencia feltétel teljesülésével. Az ellenőrzés rámutatott arra, hogy véges hőmérsékleten instabillá válik a kapott fázis, mely szemléletes és azzal magyarázható, hogy a kapott fázis egy kvázi 2d-os rendszerként viselkedik, mely stabilitását a Mermin-Wagner-tétel megakadályozza. A közelítés magasabb rendjeit egy másodsomszédok közt ébredő effektív ferromágneses Heisenberg-kölcsönhatással vettük figyelembe, mely csatolás értékét ennek megfelelően állítottuk be. Az így kiterjesztett modellben már a kapott alapállapot stabilizálódott véges hőmérsékleten is.

Végezetül meghatároztuk a kísérletileg fontos korrelációs függvényét a helikális állapotoknak, mely segítségével szórás-kísérletekkel beazonosíthatóvá váltak a különböző  $\vartheta$  paraméterrel jellemzett helikális állapotok.

### 3. Eredményeink tézispontokban

#### 3.1. Átlagos első visszatérési idő iterált dinamikákban

- [1] Tetszőleges (tiszta) kezdőállapotból indított nyílt kvantumrendszer, iterált dinamika mellett definiált átlagos visszatérési idejére adtunk egy, a korábbi statisztikus átlagoláson alapuló definícióval ekvivalens, alternatív megfogalmazást. Ezen új konstrukció szerint a visszatérési idő a bolyongás teljes ideje alatt bejárt állapotoknak azon részének a trace-e, melyek az adott időpillanatig egyszer sem tértek vissza. A többszörös visszatérés elkerülését az eredeti dinamika helyett, egy úgynevezett feltételes dinamika használatával biztosítottuk, melyben minden időlépésben, az eredeti időlépést definiáló csatornát követően egy projektív mérést alkalmaztunk, mely a már visszatért állapotokat nem engedte tovább fejlődni. A feltételes dinamika tanulmányozása során megmutattuk, hogy egy tetszőleges (tiszta) kezdőállapotból indított rendszer a teljes fejlődése során ugyanazt a Hilbert-teret feszíti ki adott kvantumcsatorna, illetve a hozzá tartozó feltételes dinamika mellett. Továbbá, ha a kezdőállapotból indított Cesàro átlagolással definiált egyensúlyi állapotnak sajátállapota a kezdő állapot (nem nulla sajátértékkel), akkor a bolyongás mindig visszatérő[I][III].
- [2] Összekötöttük és általánosítottuk véges dimenziós rendszerek iterált unitális dinamikájára is a klasszikus bisztochasztikus Markov-lánckokra, illetve az iterált unitér folyamatokra vonatkozó tételt, melyek szerint ezekben az esetekben az átlagos első visszatérési idő értéke egész és megegyezik a bolyongás során bejárt rendszer méretével. Ezen tételünk érvényességét különböző analitikus és numerikus példákon szemléltettük, valamint kitekintésként, a tételen túlmutató analitikus példákat is adtunk[III].

- [3] Megmutattuk, hogy a klasszikus folyamatokra vonatkozó Kac lemma a lehetséges csatornák egy tágabb osztályára is általánosítható, melynek az unitális egy speciális esete. A klasszikus Kac lemma kapcsolatot teremt a bolyongást szemléltető gráf egy tetszőleges rácspontjának átlagos első visszatérési ideje és a dinamikához rendelt egyensúlyi eloszlás között. Pontosabban, az átlagos visszatérési idő egy adott pontban megegyezik az egyensúlyi eloszlás adott komponensének a reciprokával. Ezt a lemmát általánosítottuk olyan véges dimenziójú rendszerek iterált folyamataira, ahol a (tiszt) kezdő állapotból indított Cesàro átlagolással definiált egyensúlyi állapotnak sajátállapota a kezdő állapot (nem nulla sajátértékkel)[I].
- [4] Tetszőleges (véges dimenziójú) nyílt iterált dinamikákban definiálható átlagos elérési idő meghatározásával demonstráltuk az általunk talált kvantum Kac lemma általánosságát és erősségét. Ezen folyamatokra a kvantum Kac lemma alkalmazhatóságát az biztosítja, hogy az eredeti rendszer kiterjeszhető egy ancilla állapottal, mely egy klasszikus folyamattal be-, illetve kiszór a kezdeti, illetve a végállapotból, így elegendő az ancilla állapotba való visszatérési időt meghatározni, a klasszikus kommunikáció pedig automatikusan biztosítja a tételben megkövetelt feltételek teljesülését[I].



### 3.2. Oder-by-disorder mechanizmus során kialakuló alapállapot az $su(4)$ Heisenberg-modellben

- [5] Meghatároztuk az fcc rácson értelmezett  $SU(4)$  szimmetrikus antiferromágneses Heisenberg-modell lehetséges klasszikus rendeződéseit. Az alapállapotot megvalósító klasszikus konfiguráció globális mértékrögzítés után is végtelenül degenerált maradt. A mérték megválasztása rögzíti, hogy  $(1,0,0)$  vagy  $(0,1,0)$  vagy  $(0,0,1)$  kristálytani irányok közül melyik mentén haladjunk az alapállapot konfiguráció megkonstruálása során, valamint hogy az egyes szinteken melyik két spin-állásból képzett szimmetrikus és antiszimmetrikus kombinációk alkossák az adott síkhoz tartozó (bipartit)rács alrács-mágnesezettségeit. Az egyes szinteken a keveredés mértéke azonban tetszőlegesnek adódott. A lehetséges alapállapot konfigurációk közül kiválasztottuk a kitüntetett szerepet játszó egyparaméteres alosztályt, az úgynevezett helikális állapotokat, ahol a keveredés mértékét megadó szög az egyes szintek távolságával arányos és kiszámoltuk a hozzájuk tartozó, kísérletileg is mérhető, klasszikus spin-spin korrelációs függvényeket[II].
- [6] A kristály magas koordinációs száma lehetővé tette, hogy lineáris spinhullám-számolással figyelembe vegyük a klasszikus rendeződés felett megjelenő kvantumfluktuációk hatását. A fluktuációk figyelembevételével (a két szélső esetben analitikus számolással) megmutattuk, hogy zérus hőmérsékleten a rendszer alapállapota már egyértelmű: a triviális helikális állapot. A rendszer véges hőmérsékletű analízise során azonban a triviális helikális állapot nem bizonyult stabilnak, de megmutattuk, hogy már egy tetszőlegesen kis ferromágneses másodsomszéd kölcsönhatással kiterjesztett modellben a triviális helikális állapot alacsony hőmérsékleten is stabilizálódik és a rendszer alapállapota marad véges hőmérsékleten is[II].



## 4. Publikációk

### 4.1. A doktori dolgozat vázát alkotó cikkek

- [I] Sinkovicz P., Kiss T., Asbóth J. K. – Generalized Kac’s Lemma for Recurrence Time in Iterated Open Quantum Systems, **Phys. Rev. A**, 93. 050101(R) (2016) /impaktfaktor: 2.81/
- [II] Sinkovicz P., Szirmai G., Penc K. – Order by disorder in a four flavor Mott-insulator on the fcc lattice, **Phys. Rev. B**, 93. 075137 (2016) /impaktfaktor: 3.74/
- [III] Sinkovicz P., Kurucz Z., Kiss T., Asbóth J. K. – Quantized recurrence time in iterated open quantum dynamics, **Phys. Rev. A** 91. 042108 (2015) /impaktfaktor: 2.81/

### 4.2. Egyéb megjelent publikációk

- [IV] Sinkovicz P., Zamora A., Szirmai E., Lewenstein M., Szirmai G. – Spin liquid phases of alkaline-earth-metal atoms at finite temperature, **Phys. Rev. A** 88. 043619 (2013) /impaktfaktor: 2.99/
- [V] Szoboszlai Z., Nagy Gy., Kertész Zs., Angyal A., Furu E., Török Zs., Ratter K., Sinkovicz P., Kiss A.Z. – Characterization of atmospheric aerosols in different indoor environments, **ATOMKI Annual Report**, ISSN 0231-3596 (no.26) 43, 41., 43102323 (2011)
- [VI] Mandula G., Kis Z., Sinkovicz P., Kovács L. – Homogeneous linewidth of the  $I_{11/2}-I_{15/2}$  optical transition of erbium in  $\text{LiNbO}_3:\text{Er}^{3+}$ , **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**; Volume 15, Page, 012062 (2010)



## Hivatkozások

- [1] Bartel Leendert Van der Waerden. *Science awakening I*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] Nicholas Campion. *The great year: astrology, millenarianism, and history in the Western tradition*. Penguin (Non-Classics), 1994.
- [3] John M Cooper and DS Hutchinson. *Plato complete works*. Hackett Publishing Company, 1997.
- [4] Isaac Newton and Andrew Motte. *Principia*. Maclehose, 1871.
- [5] Alain Chenciner. Three body problem. *Scholarpedia*, 2(10):2111, 2007.
- [6] Joachim Worthington. *A Study of the Planar Circular Restricted Three Body Problem and the Vanishing Twist*. PhD thesis, Thesis, Univ. Sydney, 2012.
- [7] Henri Poincaré. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta mathematica*, 13(1):A3–A270, 1890.
- [8] Luis Barreira. Poincaré recurrence: old and new. In *XIVth International Congress on Mathematical Physics*. World Scientific, pages 415–422. World Scientific, 2006.
- [9] Bertrand Duplantier and Vincent Rivasseau. *Henri Poincaré, 1912–2012*. Springer, 2012.
- [10] M. Kac. On the notion of recurrence in discrete stochastic processes. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53(10):1002–1010, 10 1947.

- [11] F Alberto Grünbaum, Luis Velázquez, Albert H Werner, and Reinhard F Werner. Recurrence for discrete time unitary evolutions. *Communications in Mathematical Physics*, 320(2):543–569, 2013.
- [12] Pierre Curie. *Propriétés magnétiques des corps a diverses températures*. Gauthier-Villars et fils, 1895.
- [13] Louis Néel. Propriétés magnétiques des ferrites-ferrimagnétisme et antiferromagnétisme. In *Annales de Physique*, number 2 in 3, pages 137–198. EDP SCIENCES SA 17, AVE DU HOGGAR, PA COURTABOEUF, BP 112, F-91944 LES ULIS CEDEX A, FRANCE, 1948.
- [14] Louis Néel. *Influence des fluctuations des champs moléculaires sur les propriétés magnétiques des corps*. PhD thesis, Université, 1932.
- [15] LD Landau. A possible explanation of the field dependence of the susceptibility at low temperatures. *Phys. Z. Sowjet*, 4:675, 1933.
- [16] L Néel. Théorie du paramagnétisme constant; application au manganèse. *CR Acad. Sc*, 203:304–306, 1936.
- [17] Lars Onsager. Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, 65(3-4):117, 1944.
- [18] Chen Ning Yang. The spontaneous magnetization of a two-dimensional Ising model. *Physical Review*, 85(5):808, 1952.
- [19] Daniel C Mattis and CY Pan. Ground-State Energy of Heisenberg Antiferromagnet for Spins  $s = 1/2$  and  $s = 1$  in  $d = 1$  and 2 Dimensions. *Physical review letters*, 61(4):463, 1988.
- [20] DC Mattis and CY Pan. *Magnetic Excitations and Fluctuations II*. Springer Series in Solid State Physics, 1984.

- [21] PW Anderson, G Baskaran, Z Zou, and T Hsu. Resonating–valence-bond theory of phase transitions and superconductivity in La<sub>2</sub>CuO<sub>4</sub>-based compounds. *Physical review letters*, 58(26):2790, 1987.
- [22] JE Hirsch. Antiferromagnetism, localization, and pairing in a two-dimensional model for CuO<sub>2</sub>. *Physical review letters*, 59(2):228, 1987.
- [23] PB Wiegmann. Superconductivity in strongly correlated electronic systems and confinement versus deconfinement phenomenon. *Physical review letters*, 60(9):821, 1988.
- [24] E Jordao Neves and J Fernando Perez. Long range order in the ground state of two-dimensional antiferromagnets. *Physics Letters A*, 114(6):331–333, 1986.
- [25] Ian Affleck, Tom Kennedy, Elliott H Lieb, and Hal Tasaki. Valence bond ground states in isotropic quantum antiferromagnets. In *Condensed Matter Physics and Exactly Soluble Models*, pages 253–304. Springer, 2004.
- [26] PC Hohenberg. Existence of long-range order in one and two dimensions. *Physical Review*, 158(2):383, 1967.
- [27] N David Mermin and Ho Wagner. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-or two-dimensional isotropic Heisenberg models. *Physical Review Letters*, 17(22):1133, 1966.
- [28] Sidney Coleman. There are no Goldstone bosons in two dimensions. *Communications in Mathematical Physics*, 31(4):259–264, 1973.





